Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
ENIM 2016

Nicolás Carreño
nicolas.carrenog@usm.cl
Miércoles 9 de Noviembre, 2016

Taller:
Control y Optimización

En este taller veremos dos métodos de estabilización de sistemas diferenciales mediante la implementación numérica en `Matlab` aplicada al modelo del péndulo invertido. Estos métodos son: localización de polos y regulación lineal cuadrática.

1. El péndulo invertido

Consideremos un péndulo invertido de masa m fijo a un carrito de masa M, sobre el cual podemos controlar la aceleración $u(t)$, como se muestra en la figura 1. La idea es encontrar un control $u(t)$ de manera de mantener el péndulo en posición vertical, es decir, estabilizar el sistema en torno al punto de equilibrio inestable (podemos pensar esto como mantener una escoba en posición vertical con el movimiento de la mano).

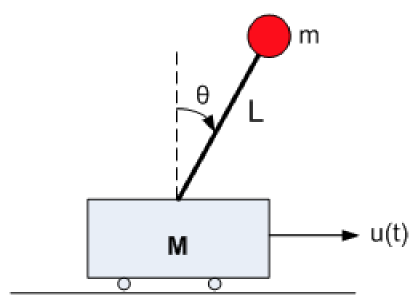

Figura 1: Péndulo invertido

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{\xi} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta = u, \\ mL\ddot{\xi}\cos\theta + mL^2\ddot{\theta} - mgL\sin\theta = 0, \end{cases}$$

donde $\xi(t)$ es la posición del carro y $\theta(t)$ es el ángulo del péndulo con respecto a la vertical en el instante t. Un cálculo sencillo nos lleva al sistema no lineal de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \dfrac{mL\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\cos\theta\sin\theta + u}{M + m\sin^2\theta}, \\ \ddot{\theta} = \dfrac{-mL\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - u\cos\theta}{L(M+m\sin^2\theta)}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definiendo el vector de estados $x(t) = (\xi(t), \dot{\xi}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^4$, podemos escribir el sistema (1.1) como un sistema no lineal de primer orden de la forma

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1.2}$$

donde $f(x,u) \in \mathbb{R}^4$ está dada por

$$f(x,u) = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dfrac{mL\dot{\theta}^2 \sin\theta - mg\cos\theta\sin\theta + u}{M + m\sin^2\theta} \\ \dot{\theta} \\ \dfrac{-mL\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - u\cos\theta}{L(M + m\sin^2\theta)} \end{pmatrix}.$$

El objetivo es encontrar un control de la forma $u(t) = -Kx(t)$, donde $K = (k_1\ k_2\ k_3\ k_4) \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$, tal que la solución de (1.2) cumpla $x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, para toda condición inicial cercana al equilibrio (en este caso se dice que la estabilización es local). Un control de esta forma se dice *control feedback*, *retroalimentado* o *control de ciclo cerrado*. Para esto, usaremos el siguiente principio de linealización (ver, por ejemplo, [2]).

Teorema 1.1. *Sea (x_e, u_e) un punto de equilibrio del sistema (1.2) ($f(x_e,u_e) = 0$). Si el sistema linealizado en torno a (x_e,u_e) dado por*

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e,u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e,u_e)u$$

es estabilizable por un control $u = -Kx$, entonces el control $u = -K(x - x_e) + u_e$ estabiliza local y asintóticamente el sistema no lineal (1.2) en torno a (x_e,u_e), esto es, la solución del sistema

$$\dot{x} = f(x, -K(x - x_e) + u_e)$$

satisface $x(t) \to x_e$ cuando $t \to +\infty$ y $x(0)$ es cercano a x_e.

Podemos ver que el sistema linealizado de (1.2) en torno al punto de equilibrio $(x_e,u_e) = (0,0)$ está dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.3}$$

donde las matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ están dadas por

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{LM} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix}.$$

De esta manera, con un control de la forma $u = -Kx$, el sistema lineal es

$$\dot{x} = (A - BK)x,$$

y la tarea es encontrar $K = (k_1\ k_2\ k_3\ k_4) \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ tal que 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable. En otras palabras, será suficiente que la matriz $A - BK$ tenga todos sus valores propios con parte real estrictamente negativa.

A continuación, presentaremos dos métodos (y su implementación en `Matlab`) para lograr esto último.

2. Método de estabilización 1: Localización de polos

El método de localización de polos está basado en el siguiente resultado. La prueba se puede ver en [1] o [2].

Teorema 2.1 (Teorema de localización de polos)**.** *Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tales que la matriz*

$$[B|AB|A^2B|\cdots|A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{2.1}$$

tiene rango n. Entonces, para todo polinomio p real unitario de grado n, existe $K \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tal que

$$\det(A - BK - \lambda I_n) = p(\lambda),$$

esto es, el polinomio característico de $A - BK$ es igual a p.

Observación 2.2. *Por supuesto, este resultado nos entrega la matriz K que buscamos. En efecto, basta tomar $p(\lambda) = (\lambda + 1)^n$, con lo que los valores propios de la matriz $A - BK$ son todos iguales a -1.*

Observación 2.3. *La matriz escrita en (2.1) es llamada* matriz de Kalman *y la condición impuesta* condición de Kalman*.*

Gracias al Teorema 2.1, podemos seguir los siguiente pasos para la implementación de nuestro problema.

1. Linealizar el sistema $\dot{x} = f(x, u)$ en torno a $(0, 0)$: $\dot{x} = Ax + Bu$.
2. Verificar que el par (A, B) cumple la condición de Kalman (2.1).
3. Encontrar K tal que los valores propios de $A - BK$ sean a parte real estrictamente negativa.
4. Definir el control como $u = -Kx$.
5. Resolver el sistema $\dot{x} = f(x, -Kx)$.

Por supuesto, el paso 3. es la clave de este proceso. Afortunadamente, `Matlab` incluye una función en el "Control System Toolbox" llamada `place`, que entrega la matriz K que queremos. La forma de usarla es la siguiente:

```
K = place(A,B,p)
```

donde `p` es un vector y `K` es una matriz tal que `A-BK` tiene valores propios iguales a las componentes de `p`. Importante: las componentes de `p` no pueden repetirse.

El siguiente *script* escrito en `Matlab` resuelve nuestro problema, que incluye al final los gráficos de cada uno de los estados del sistema en función del tiempo.

```
% Estabilizacion del pendulo invertido usando localizacion de polos
clear; clc; close all;

% Variables
global M m L g;
M = 10;
m = 1;
```

```
L = 1;
g = 10;

% Definicion de matrices A y B del sistema linealizado x'=Ax+Bu
global A B;
A = [0 1 0 0;
     0 0 -m*g/M 0;
     0 0 0 1;
     0 0 (M+m)*g/(L*M) 0];
B = [0;
     1/M;
     0;
     -1/(L*M)];

% Localizacion de polos usando la funcion place
p = [-1 -2 -3 -4]; % Vector de valores propios deseados
K = place(A,B,p);

% Resolviendo el sistema no lineal x'=f(x,-Kx)
ci = [0.5 0.2 0.4 1.0]; % Condiciones iniciales para [xi xidot theta thetadot]
int = [0 20]; % Intervalo donde se resuelve el sistema
[t,x] = ode45(@(t,x) sistema(t,x,K),int,ci);

% Graficando la solucion
figure;
subplot(2,2,1); plot(t,x(:,1)); title('\xi');
subplot(2,2,2); plot(t,x(:,2)); title('\xi^{\prime}');
subplot(2,2,3); plot(t,x(:,3)); title('\theta');
subplot(2,2,4); plot(t,x(:,4)); title('\theta^{\prime}');
```

Para utilizar el *solver* de ecuaciones diferenciales `ode45`, es necesario escribir el sistema que se quiere resolver. Esto está hecho en la siguiente función que debe escribirse en un nuevo archivo llamado `sistema.m`:

```
function dxdt = sistema(t,x,K)

% Parametros del sistema
global M m L g;

% x=(xi,xidot,theta,thetadot): estados del sistema
xi=x(1);
xidot=x(2);
theta=x(3);
thetadot=x(4);

% Definimos el control como u=-Kx
u = -K*x;
```

```
% Definimos la funcion f(t,x) del sistema dxdt=f(t,x)
den = M+m*sin(theta)^2; % El denominador comun

dxdt = [xidot;
      (m*L*thetadot^2*sin(theta) - m*g*cos(theta)*sin(theta) + u)/den;
     thetadot;
     (-m*L*thetadot^2*sin(theta)*cos(theta) + (M+m)*g*sin(theta) - u*cos(theta))/(L*den) ];
```

3. Método de estabilización 2: Regulación lineal cuadrática

Consideremos el funcional

$$C(u) = \int_0^{+\infty} \big(x(t)^{tr} Q x(t) + u(t) R u(t)\big) \mathrm{d}t,$$

donde $Q \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ es simétrica definida positiva, $R > 0$ y $x(t)$ es la solución del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

El segundo método de estabilización que veremos tiene que ver con el siguiente problema de minimización:

$$\begin{cases} \min\limits_u C(u) \\ \text{sujeto a } \dot{x} = Ax + Bu. \end{cases} \tag{3.1}$$

Tenemos el siguiente resultado, cuyo enunciado general se puede encontrar en [2].

Teorema 3.1. *Supongamos que el par (A, B) cumple la condición de Kalman (2.1). Entonces, existe una única trayectoria $x(t)$ minimizante para el problema (3.1) asociada al control*

$$u = -R^{-1} B^{tr} S x,$$

donde $S \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ es la única matriz simétrica definida positiva solución de la ecuación de Riccati estacionaria

$$A^{tr} S + SA - SBR^{-1} B^{tr} S + Q = 0. \tag{3.2}$$

Observación 3.2. *Notemos que la trayectoria minimizante del problema (3.1) cumple que $x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. De este modo, resolvemos el problema de estabilización por medio de un problema de minimización (problema de control óptimo).*

Observación 3.3. *El control se escribe de la forma $u = -Kx$, donde $K = R^{-1} B^{tr} S$. Sin embargo, se requiere resolver la ecuación matricial (3.2).*

Podemos seguir los siguientes pasos para resolver nuestro problema de estabilización.

1. Linealizar el sistema $\dot{x} = f(x, u)$ en torno a $(0, 0)$: $\dot{x} = Ax + Bu$.
2. Verificar que el par (A, B) cumple la condición de Kalman (2.1).
3. Resolver la ecuación matricial (3.2). Por simplicidad, se puede utilizar $Q = I_4$ y $R = 1$.
4. Definir el control como $u = -Kx$, donde $K = R^{-1} B^{tr} S$.
5. Resolver el sistema $\dot{x} = f(x, -Kx)$.

Matlab incorpora en el "Control System Toolbox" una función para resolver el problema de minimización (3.1). La forma de invocarla es la siguiente:

```
[K,S,e] = lqr(A,B,Q,R).
```

La función lqr recibe como parámetros las matrices del problema (3.1) y entrega: la matriz K que define el control $u = -Kx$, la solución S de la ecuación (3.2) y un vector e cuyas componentes son los valores propios de A-BK (¡se puede comprobar que son todos a parte real estrictamente negativa!).

El siguiente *script* en Matlab resuelve el problema de estabilización mediante este método. Se incluyen al final los gráficos de cada uno de los estados del sistema en función del tiempo.

```
% Estabilizacion del pendulo invertido usando regulador cuadratico
clear; clc; close all;

% Variables
global M m L g;
M = 10;
m = 1;
L = 1;
g = 10;

% Definicion de matrices A y B del sistema linealizado x'=Ax+Bu
global A B;
A = [0 1 0 0;
     0 0 -m*g/M 0;
     0 0 0 1;
     0 0 (M+m)*g/(L*M) 0];
B = [0;
     1/M;
     0;
     -1/(L*M)];

% Calculo de matriz K usando la funcion lqr
Q = diag([1 1 1 1]);
R = 1;
[K,S,e] = lqr(A,B,Q,R);

% Resolviendo el sistema no lineal x'=f(x,-Kx)
ci = [0.5 0.2 0.4 1]; % Condiciones iniciales para [xi xidot theta thetadot]
int = [0 20]; % Intervalo donde se resuelve el sistema
[t,x] = ode45(@(t,x) sistema(t,x,K),int,ci);

% Graficando
figure;
subplot(2,2,1); plot(t,x(:,1)); title('\xi');
subplot(2,2,2); plot(t,x(:,2)); title('\xi^{\prime}');
subplot(2,2,3); plot(t,x(:,3)); title('\theta');
subplot(2,2,4); plot(t,x(:,4)); title('\theta^{\prime}');
```

4. Actividades

A continuación se proponen las siguientes actividades para sacar el máximo provecho a la implementación de nuestro problema de estabilización. Para cada una, puede modificar los códigos entregados anteriormente como le convenga.

1. Verifique que el sistema linealizado (1.3) sin control ($u = 0$) es inestable. Para esto calcule los valores propios de A con `eig(A)` y resuelva el sistema lineal con el solver `ode45`. El sistema lo puede definir con la función siguiente, que deberá escribir en un nuevo archivo (`sistemalineal.m`):

```
function dxdt = sistemalineal(t,x,A,B,K)

dxdt = (A-B*K)*x;
```

   Cuando invoque esta función, no olvide definir la matriz K como `K = zeros(1,4);`.

2. Repita para el sistema no lineal. ¿Qué diferencias puede notar entre el comportamiento del sistema lineal y el no lineal?

3. Aplique los métodos de estabilización al sistema linealizado. Nuevamente compare con el sistema no lineal para distintas condiciones iniciales.

4. Realice un gráfico $\dot{\theta}$ vs θ. Si el sistema se puede estabilizar en torno al origen, ¿qué figura debiera verse en este gráfico?.

Referencias

[1] J.-M. Coron. *Control and Nonlinearity.* Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xiv+426 pp.

[2] E. Trélat. *Contrôle Optimale. Théorie & Applications.* Mathématiques Concrètes, Vuibert, Paris, 2005. vi+246 pp.