Sur la contrôlabilité de quelques systèmes de type parabolique avec un nombre réduit de contrôles et d'une équation de KdV avec dispersion évanescente

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie

Thèse presentée par
Nicolás Carreño Godoy
et realisée sous la direction de
Sergio Guerrero Rodriguez

30 septembre, 2014

Plan de l'exposé

Système de contrôle

Un système de contrôle d'une équation aux dérivées partielles peut être formulé comme

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), v(t)), \quad t > 0 \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

- $y(t) \in \mathcal{X}$ décrit l'état du système.
- $v(t) \in \mathcal{U}$ est le contrôle.
- $\mathcal{X}, \mathcal{U}$ sont les espaces d'états et contrôles admissibles, respectivement.
- Problème de la contrôlabilité: Pour y^0 et $T > 0$ donnés, trouver $v(t)$ qui mène la solution $y(t)$ vers une cible à l'instant T.
- Types de contrôlabilité: Contrôlabilité exacte, contrôlabilité à zéro, contrôlabilité approchée, contrôlabilité locale, contrôlabilité globale, contrôlabilité aux trajectoires...

Plan de l'exposé

Navier-Stokes dans un domaine borné

- Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ or 3), $T > 0$.
- $\omega \subset \Omega$ (domaine de contrôle), $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T)$

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v\mathbb{1}_\omega, \quad \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $v = (v_1, \dots, v_N)$ est le contrôle supporté dans ω.

- On cherche v tel que $y(T) = 0$ et $v_{i_0} \equiv 0$, $i_0 \in \{1, \dots, N\}$.
  - Premiers résultats par Fernández-Cara, Guerrero, Imanuvilov, Puel (2006) dans le cas: $\bar{\omega} \cap \partial\Omega \neq 0$ (contrôlabilité aux trajectoires).
- Notre but est d'enlever cette restriction géométrique.
  - Résultat pour le système de Stokes par Coron, Guerrero (2009)

Contrôlabilité locale à zéro du système de Navier-Stokes

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p = v\mathbb{1}_\omega, \quad \nabla\cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

$$y^0 \in V := \{u \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla\cdot u = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

Théorème (Guerrero, C., 2013, JMFM)

Soit $i_0 \in \{1,\dots,N\}$. Alors, pour tout $T>0$ et $\omega \subset \Omega$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y^0 \in V$ satisfaisant $\|y^0\|_V \le \delta$, il existe un contrôle $v \in L^2(\omega\times(0,T))^N$, avec $v_{i_0} \equiv 0$, et une solution associée (y,p) telle que $y(T) = 0$ dans Ω.

Stratégie

- Contrôlabilité à zéro du système linéarisé autour de zéro:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \nabla p = f + v\mathbb{1}_\omega, \quad \nabla\cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

  où $f \in L^2(Q)^N$ décroît exponentiellement en $t = T$.

- Inégalité d'observabilité appropriée pour le système adjoint avec un terme source:

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi = g, \quad \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^T & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- Théorème d'inversion locale pour revenir au problème non linéaire.

$$\mathcal{A} = \left(\quad y_t - \Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p - v\mathbb{1}_\omega \quad , \quad y(0) \quad \right)$$

Inegalité d'observabilité

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi = g, \quad \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^T & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- Pour un contrôle v avec $v_{i_0} \equiv 0$ (inégalité de Carleman):

$$\iint_Q \rho_1(t)|\varphi|^2 \leq C \iint_Q \rho_2(t)|g|^2 + C \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{N} \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_3(t)|\varphi_j|^2$$

$\rho_k(t) \sim \exp(-C_k/t^4(T-t)^4)$, $g \in L^2(Q)^N$

- Si $\bar\omega \cap \partial\Omega \neq \emptyset$: on utilise $\varphi_{|\Sigma} = 0$ et $\nabla\cdot\varphi = 0$ pour estimer φ_{i_0}.
- Comme $\bar\omega \cap \partial\Omega = \emptyset$, on évite des termes locaux de φ_{i_0}.
  - Méthode introduite par Coron-Guerrero (2009) ($g \equiv 0$).

Idée de la preuve

- On pose $\rho(t)\varphi = \varphi^f + \varphi^r$, avec $\rho(t) = \exp(-C/t^8(T-t)^8)$:

$$-\varphi^f_t - \Delta\varphi^f + \nabla\pi^f = \rho g, \qquad \nabla\cdot\varphi^f = 0,\ \varphi^f_{|\Sigma} = 0,\ \varphi^f(T) = 0$$

$$-\varphi^r_t - \Delta\varphi^r + \nabla\pi^r = -\rho'\varphi, \quad \nabla\cdot\varphi^r = 0,\ \varphi^r_{|\Sigma} = 0,\ \varphi^r(T) = 0$$

- $\nabla\cdot\varphi^r = 0 \Rightarrow \Delta\pi^r = 0$. On regarde les équations satisfaites par $\nabla\Delta\varphi^r_j$:

$$-(\nabla\Delta\varphi^r_j)_t - \Delta(\nabla\Delta\varphi^r_j) = -\rho'\,\nabla\Delta\varphi_j, \quad j \neq i_0$$

- On perd les conditions au bord. On utilise une inégalité de Carleman avec conditions au bord non homogènes montrée par Imanuvilov, Puel, Yamamoto (2009).
- Les termes de bords sont estimés grâce à des résultats de régularité pour le système de Stokes.

Système de Boussinesq

On considère le système de Boussinesq:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p = v\mathbb{1}_\omega + \theta\, e_N, \quad \nabla\cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ \theta_t - \Delta\theta + y\cdot\nabla\theta = v_0\mathbb{1}_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0, \quad \theta = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Théorème (C., 2013, MCRF)

Soit $i_0 \in \{1,\dots,N-1\}$ et $(\bar p, \bar\theta)$ une solution de

$$\begin{cases} \nabla\bar p = \bar\theta\, e_N & \text{dans } Q, \\ \bar\theta_t - \Delta\bar\theta = 0 & \text{dans } Q, \\ \bar\theta = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad \bar\theta(0) = \bar\theta^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors, pour tout $T>0$ et $\omega\subset\Omega$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $(y^0,\theta^0)\in V\times H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\|(y^0,\theta^0)-(0,\bar\theta^0)\|_{V\times H_0^1(\Omega)}\leq\delta$, il existe des contrôles $v_0\in L^2(\omega\times(0,T))$ et $v\in L^2(\omega\times(0,T))^N$, avec $v_{i_0}\equiv v_N\equiv 0$, tels que la solution associée (y,p,θ) satisfait $y(T)=0$ et $\theta(T)=\bar\theta(T)$ dans Ω.

Plan de l'exposé

Contrôles insensibilisants pour le système de Boussinesq

On considère le système de contrôles à données incomplètes suivant:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p = f + v\mathbb{1}_\omega + \theta\, e_N, \quad \nabla\cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ \theta_t - \Delta\theta + y\cdot\nabla\theta = f_0 + v_0\mathbb{1}_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0, \quad \theta = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 + \tau\widehat{y}_0, \quad \theta(0) = \theta^0 + \tau\widehat{\theta}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où τ est un réel petit et $\|\widehat{y}^0\|_{L^2(\Omega)^N} = \|\widehat{\theta}^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ sont inconnus.
Problème d'insensibilisation: Trouver v et v_0 tels que la fonctionnelle (appelée Sentinelle)

$$J_\tau(y,\theta) := \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \left(|y|^2 + |\theta|^2\right), \quad \mathcal{O}\subset\Omega \text{ (l'observatoire)}$$

ne soit pas affectée par l'incertitude sur donnée initiale, i.e.,

$$\left.\frac{\partial J_\tau(y,\theta)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall\,(\widehat{y}_0,\widehat{\theta}_0)\in L^2(\Omega)^{N+1} \text{ t.q. } \|\widehat{y}_0\|_{L^2(\Omega)^N} = \|\widehat{\theta}_0\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Un système en cascade

La condition précédente est équivalente au problème de contrôle à zéro: trouver v et v_0 tels que $z(0) = 0$ et $q(0) = 0$, où

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + (w \cdot \nabla) w + \nabla p_0 = f + v\,\mathbb{1}_\omega + r\,e_N, & \nabla \cdot w = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -z_t - \Delta z + (z \cdot \nabla^t) w - (w \cdot \nabla) z + \nabla p_1 = w \mathbb{1}_{\mathcal{O}}, & \nabla \cdot z = 0 \quad \text{dans } Q, \\ r_t - \Delta r + (w \cdot \nabla) r = f_0 + v_0\,\mathbb{1}_\omega & \text{dans } Q, \\ -q_t - \Delta q - (w \cdot \nabla) q = z_N + r \mathbb{1}_{\mathcal{O}} & \text{dans } Q, \\ w = z = 0, \quad r = q = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ w(0) = y^0, \quad z(T) = 0, \quad r(0) = \theta^0, \quad q(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Théorème (Guerrero, Gueye, C., COCV)

Soit $i_0 \in \{1, \dots, N-1\}$. On suppose que $y^0 = 0$, $\theta^0 = 0$ et $\mathcal{O} \cap \omega \neq \emptyset$. Alors, il existe $\delta > 0$ et $K > 0$ tels que si $\|e^{K/t^{10}}(f, f_0)\|_{L^2(Q)^{N+1}} < \delta$, il existe des contrôles (v, v_0) dans $L^2(\omega \times (0,T))$, avec $v_{i_0} \equiv v_N \equiv 0$ tels que $z(0) = 0$ et $q(0) = 0$ dans Ω.

- Contrôles insensibilisants pour le système de Navier-Stokes avec une composante nulle: (Gueye, C. 2014, JMPA)

Inégalité d'observabilité pour le système adjoint

Variables duales: $\varphi \leftrightarrow w, \quad \psi \leftrightarrow z, \quad \phi \leftrightarrow r, \quad \sigma \leftrightarrow q$

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi_\varphi = g^\varphi + \psi\,\mathbb{1}_{\mathcal{O}}, & \nabla\cdot\varphi = 0 & \text{dans } Q, \\ \psi_t - \Delta\psi + \nabla\pi_\psi = g^\psi + \sigma\, e_N, & \nabla\cdot\psi = 0 & \text{dans } Q, \\ -\phi_t - \Delta\phi = g^\phi + \varphi_N + \sigma\,\mathbb{1}_{\mathcal{O}} & & \text{dans } Q, \\ \sigma_t - \Delta\sigma = g^\sigma & & \text{dans } Q, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \varphi = \psi = 0, \quad \phi = \sigma = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi(T) = 0, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad \phi(T) = 0, \quad \sigma(0) = \sigma^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

$$\iint_Q \rho_1(t)(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\phi|^2 + |\sigma|^2) \leq C\|\rho_2(t)(g^\varphi, g^\psi, g^\phi, g^\sigma)\|_X^2 + C\iint_{\omega\times(0,T)} \rho_3(t)((N-2)|\varphi_j|^2 + |\phi|^2), \quad j \neq i_0, N$$

$\rho_k(t) \sim \exp(-C_k/t^{10}(T-t)^{10})$

Idée de la preuve

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi + \nabla\pi_\varphi = g^\varphi + \psi\,1\!\!1_{\mathcal{O}}, & \nabla\cdot\varphi = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \psi_t - \Delta\psi + \nabla\pi_\psi = g^\psi + \sigma\, e_N, & \nabla\cdot\psi = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\phi_t - \Delta\phi = g^\phi + \varphi_N + \sigma\, 1\!\!1_{\mathcal{O}} & \text{dans } Q, \\ \sigma_t - \Delta\sigma = g^\sigma & \text{dans } Q, \end{cases}$$

- Carleman pour φ_j, φ_N, ψ_j, ψ_N $(j \neq i_0, N)$, ϕ et $(\partial_1^2 + (N-2)\partial_2^2)\sigma$.
- On peut absorber les termes locaux en ψ_j, ψ_N, φ_N et $(\partial_1^2 + (N-2)\partial_2^2)\sigma$ en utilisant:

$$(\partial_1^2 + (N-2)\partial_2^2)\sigma = (\partial_t^2 - \Delta^2)\Delta(\partial_t + \Delta)\phi + F(g^\varphi, g^\psi, g^\phi, g^\sigma) \text{ dans } \omega \cap \mathcal{O}$$

- Les seconds membres g^ψ et g^σ sont réguliers. Contrôlabilité du système linéaire pas classique (Coron, Lissy (2014)).

Plan de l'exposé

Équation de Korteweg-de Vries (KdV) dans un domaine borné

- $T > 0$, $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (coefficient de transport), $\varepsilon > 0$ (coefficient de dispersion), $Q := (0,1) \times (0,T)$.

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{dans } Q, \\ y_{|x=0} = v(t), \quad y_{x|x=1} = 0, \quad y_{xx|x=1} = 0 & \text{dans } (0,T), \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans } (0,1), \end{cases}$$

- Ce type de conditions au bord ont été introduites par Colin et Ghidaglia (1997,2001).
- La contrôlabilité à zéro pour tout $T > 0$ a été montrée par Guilleron (2014).
- On s'intéresse au comportement du coût de la contrôlabilité à zéro par rapport à ε.

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} := \sup_{y_0 \in L^2(0,1)} \left\{ \min_{v \in L^2(0,T)} \frac{\|v\|_{L^2(0,T)}}{\|y_0\|_{L^2(0,1)}} : y_{|t=0} = y_0, y_{|t=T} = 0 \text{ dans } (0,1) \right\}.$$

Une borne du coût de la contrôlabilité à zéro

Théorème (Guerrero, C., 2014)

Soit $T > 0$, $M \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixes. Alors,

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq C_0 \exp\left(C(\varepsilon^{-1/2}T^{-1/2} + M^{1/2}\varepsilon^{-1/2} + MT)\right), \quad \text{si } M > 0, \text{ et}$$

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq C_0 \exp\left(C(\varepsilon^{-1/2}T^{-1/2} + |M|^{1/2}\varepsilon^{-1/2})\right), \quad \text{si } M < 0,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de T, M et ε, et $C_0 > 0$ dépend polynomialement de ε^{-1}, T^{-1} et $|M|^{-1}$.

- En particulier, si ε est suffisamment petit

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq C_0 \exp\left(C(T,M)\varepsilon^{-1/2}\right).$$

- Ce résultat améliore celui de Guilleron (2014) par rapport à ε, où

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq C_0 \exp\left(C(T,M)\varepsilon^{-1}\right).$$

La méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method)

- La preuve repose sur l'inégalité d'observabilité

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq C_{obs} \|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)},$$

où φ satisfait

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xxx} + M\varphi_x = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi_{|x=0} = 0, \quad \varphi_{x|x=0} = 0, \quad (\varepsilon\varphi_{xx} - M\varphi)_{|x=1} = 0 & \text{dans } (0,T). \end{cases}$$

- On considère la fonction $\phi := \varepsilon\varphi_{xx} - M\varphi$, qui satisfait

$$\begin{cases} -\phi_t - \varepsilon\phi_{xxx} + M\phi_x = 0 & \text{dans } Q, \\ \phi_{x|x=0} = 0, \quad \phi_{xx|x=0} = 0, \quad \phi_{|x=1} = 0 & \text{dans } (0,T), \end{cases}$$

et on montre (inégalité de Carleman)

$$\iint_Q e^{-2s\alpha}\alpha^5|\phi|^2 \leq C_0 \int_0^T e^{-2s\alpha}\alpha^5|\phi_{|x=0}|^2.$$

- On récupère φ à partir de ϕ et $\varphi_{|x=0} = \varphi_{x|x=0} = 0$ (E.D.O.).

Plan de l'exposé

Introduction

I. Quelques résultats de contrôlabilité avec un nombre réduit de contrôles scalaires pour systèmes de type Navier-Stokes

- Contrôlabilité locale à zéro des systèmes de Navier-Stokes et de Boussinesq
- Contrôles insensibilisants pour le système de Boussinesq

II. Sur la contrôlabilité uniforme d'une équation de KdV linéaire avec dispersion évanescente

- Une borne du coût de la contrôlabilité à zéro
- Un résultat d'explosion du coût

Perspectives

Un résultat d'explosion du coût

Pour l'équation de KdV classique:

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{dans } Q, \\ y_{|x=0} = v(t), \quad y_{|x=1} = 0, \quad y_{x|x=1} = 0 & \text{dans } (0,T), \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{dans } (0,1), \end{cases}$$

Glass, Guerrero (2009) montrent que

1. $T < 1/|M|$: $C^{T,\varepsilon,M}_{coût} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2})$ si $M \neq 0$.
2. $T \geq K/M$: $C^{T,\varepsilon,M}_{coût} \leq \exp(-C\varepsilon^{-1/2})$ si $M > 0, K > 0$ grand,

Théorème (Guerrero, C., 2014)

Soit $M \neq 0$. Alors, il existe $T_0 < 1/|M|$ tel que pour tout $T \in (0, T_0)$ il existe $C > 0$ (indépendant de ε) et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$C^{T,\varepsilon,M}_{coût} \geq \exp\left(C\varepsilon^{-1/2}\right), \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

De plus, si $M < 0$, on peut choisir $T_0 = 1/|M|$.

Idée de la preuve

On construit une solution particulière $\hat{\varphi}$ de

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon\varphi_{xxx} + M\varphi_x = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi_{|x=0} = 0, \quad \varphi_{x|x=0} = 0, \quad (\varepsilon\varphi_{xx} - M\varphi)_{|x=1} = 0 & \text{dans } (0,T), \\ \varphi_{|t=T} = \hat{\varphi}_T & \text{dans } (0,1), \end{cases}$$

où $0 \leq \hat{\varphi}_T \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, $\|\hat{\varphi}_T\|_{L^2(0,1)} = 1$ et tel que $\hat{\varphi}_T(x - M(T-t))$ soit supportée dans $(0,1)$ pour tout $t \in (0,T)$.

On montre:

- $\|\hat{\varphi}_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)} \leq \exp\left(-C\varepsilon^{-1/2}T^{-1/2}\right)$
- $\|\hat{\varphi}_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \geq c > 0$

et on peut conclure.

Sur la contrôlabilité uniforme

- $C^{T,\varepsilon,M}_{coût} \leq \exp(-C(T,M)\varepsilon^{-1/2})$, T grand?
- Une stratégie possible est de combiner une inégalité d'observabilité:

$$\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(C\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

avec une estimation de dissipation exponentielle (T suffisamment grand):

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(-CT\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)}.$$

- Dans notre cas: on ne sait pas...
- Mais, récemment, on a montré:

$$C^{T,\varepsilon,M}_{coût} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2}), \quad M>0, T>0, \varepsilon \text{ petit}.$$

Sur la contrôlabilité uniforme

- $C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq \exp(-C(T,M)\varepsilon^{-1/2})$, T grand?
- Une stratégie possible est de combiner une inégalité d'observabilité:

$$\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(C\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

avec une estimation de dissipation exponentielle (T suffisamment grand):

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(-CT\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)}.$$

- Dans notre cas: on ne sait pas...
- Mais, récemment, on a montré:

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2}), \quad M>0, T>0, \varepsilon \text{ petit.}$$

Sur la contrôlabilité uniforme

- $C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq \exp(-C(T,M)\varepsilon^{-1/2})$, T grand?
- Une stratégie possible est de combiner une inégalité d'observabilité:

$$\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(C\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

avec une estimation de dissipation exponentielle (T suffisamment grand):

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(-CT\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)}.$$

- Dans notre cas: on ne sait pas...
- Mais, récemment, on a montré:

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2}), \quad M > 0, T > 0, \varepsilon \text{ petit.}$$

Sur la contrôlabilité uniforme

- $C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \leq \exp(-C(T,M)\varepsilon^{-1/2})$, T grand?
- Une stratégie possible est de combiner une inégalité d'observabilité:

$$\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(C\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{xx|x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

avec une estimation de dissipation exponentielle (T suffisamment grand):

$$\|\varphi_{|t=0}\|_{L^2(0,1)} \leq \exp\left(-CT\varepsilon^{-1/2}\right)\|\varphi_{|t=T/2}\|_{L^2(0,1)}.$$

- Dans notre cas: on ne sait pas...
- Mais, récemment, on a montré:

$$C_{coût}^{T,\varepsilon,M} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2}), \quad M > 0, T > 0, \varepsilon \text{ petit.}$$

Perspectives

- Contrôlabilité avec un nombre réduit de contrôles scalaires:
  - Notre méthode limite le nombre de composantes à éliminer. Récemment, la contrôlabilité à zéro de Navier-Stokes avec deux composantes nulles a été montrée en utilisant la méthode du retour (Coron, Lissy, 2014).
  - Contrôlabilité aux trajectoires avec une composante nulle:

$$-\varphi_t - \Delta\varphi + \bar{y} \cdot D\varphi + \nabla\pi = g.$$

  - Contrôlabilité du système de Boussinesq sans contrôle sur la température.
  - Travail en cours: Contrôles insensibilisants pour le système de Boussinesq sans contrôle sur la température.
- Contrôlabilité uniforme de l'équation de KdV:
  - Travail en cours: Contrôlabilité uniforme avec 2 contrôles:
    - $y_{|x=0} = v_1(t), \quad y_{x|x=1} = 0, \quad y_{xx|x=1} = v_2(t)$
    - $y_{|x=0} = 0, \quad y_{x|x=1} = v_1(t), \quad y_{xx|x=1} = v_2(t)$

Merci de votre attention