Control de EDP:
Observabilidad, costo y sistemas

Nicolás Carreño Godoy
Universidad Técnica Federico Santa María

V-Coloquio
14 de Junio, 2016

Agenda

Agenda

Sistema de control

Un sistema de control (EDO o EDP) puede ser formulado como

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), v(t)), & t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

- $y(t)$ describe el estado del sistema.
- $v(t)$ es el control (parámetro que podemos manipular).
- Problema de controlabilidad: Dados y_0 y $T > 0$, encontrar $v(t)$ que lleve la solución $y(t)$ a un objetivo y_1 en el instante T, es decir, $y(T) = y_1$.
- Tipos de controlabilidad
  - Exacta.
  - A cero: $y(T) = 0$.
  - Aproximada: $y(T)$ cerca de y_1.
  - Local: y_0 cercana a y_1.
- Aplicaciones en diversas áreas: Industria automovilística, aeronáutica, robótica, medicina...

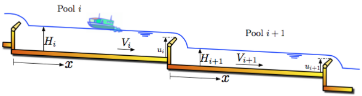
Ejemplo 1: Control de temperatura

- Temperatura de una habitación es regulada mediante un dispositivo manual o automático.
- Problema de control: Lograr una distribución determinada de temperatura en la habitación en un tiempo T.
- Ecuación del calor (lo veremos más adelante):

$$y_t - \Delta y = v \mathbb{1}_\omega \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

donde $y = y(x,t)$ es la temperatura, v es el control que actúa en $\omega \subset \Omega$.

Ejemplo 2: Profundidad y flujo de ríos navegables o canales de regadío



- Agua es transportada a través de secciones separadas por puertas automáticas para regular el flujo de agua.
- Controlar profundidad y flujo de agua actuando en las puertas.

Control de EDO lineales

$$y'(t) = Ay(t) + Bv(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N.$$

- $y(t) \in \mathbb{R}^N$.
- $v(t) \in \mathbb{R}^m$ $(m < N)$.
- $A \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{N\times m}(\mathbb{R})$.

Pregunta: Dado $y_1 \in \mathbb{R}^N$, ¿Podemos encontrar $v(t)$ tal que $y(T) = y_1$? ¿Qué condiciones sobre A y B aseguran la existencia de tal control?

En este caso, contamos con un criterio para determinar controlabilidad.

Control de EDO lineales

$$y'(t) = Ay(t) + B{\color{red}v(t)}, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N.$$

$$\to y(T) = e^{TA}y_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} B{\color{red}v(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Si la matriz simétrica (de controlabilidad)

$$\mathcal{C} = \int_0^T e^{(T-t)A} B B^{tr} e^{(T-t)A^{tr}}\,\mathrm{d}t$$

es invertible, el control dado por

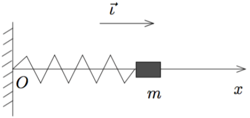
$${\color{red}v(t)} = B^{tr} e^{(T-t)A^{tr}} \mathcal{C}^{-1}(y_1 - e^{TA}y_0)$$

hace el trabajo. Además, $\mathcal{C}^{-1}$ es invertible si y sólo si la matriz (de Kalman)

$$[B|AB|A^2|\cdots|A^{N-1}B]_{N\times mN}$$

tiene rango N. (Condición de Kalman, 1963).

Ejemplo: Control de un resorte



$$x''(t) + x(t) = v(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \to y'(t) = Ay(t) + Bv(t)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz de Kalman: $[B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2. El sistema es controlable (en todo tiempo $T > 0$).

Control de EDP.

Ejemplo modelo: Ecuación del calor

Consideremos un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\omega \subset \Omega$ (dominio de control)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = v \mathbb{1}_\omega & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & x \in \partial\Omega, \\ y(0) = y_0 & x \in \Omega, \end{cases}$$

- $y = y(x,t)$: Distribución de temperatura.
- $v = v(x,t)$: Control que actúa en ω.

Pregunta: Dados $T > 0$ e $y_1 = y_1(x)$, ¿existe v tal que $y(T) = y_1$?

Ecuación del calor

Respuesta: En general, la respuesta es no. Esto debido al *efecto regularizante*.

• Parece natural considerar la noción de control a las trayectorias: Sea una solución de

$$\begin{cases} \bar{y}_t - \Delta \bar{y} = 0 & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \bar{y} = 0 & x \in \partial\Omega, \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 & x \in \Omega, \end{cases}$$

buscamos un control v tal que $y(T) = \bar{y}(T)$.

• Por linealidad (tomando $\widetilde{y} := y - \bar{y}$), esto es equivalente al control a cero:

$$y(T) = 0,$$

por lo que nos ocuparemos de este caso.

Método de dualidad: Hilbert Uniqueness Method (HUM)

¿Cómo encontrarmos o construimos el control a cero?

- Multipliquemos $y_t - \Delta y = v\mathbb{1}_\omega$ por φ solución de la ecuación (adjunta)

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \varphi = 0 & x \in \partial\Omega, \\ \varphi(T) = \varphi_T \in L^2(\Omega) & x \in \Omega, \end{cases}$$

e integremos en $\Omega \times (0,T)$:

$$\int_\Omega y(T)\varphi_T \,\mathrm{d}x = \iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega y_0\varphi(0)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega).$$

- v es un control tal que $y(T) = 0$ si y sólo si

$$\iint_{\omega\times(0,T)} v\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega y_0\varphi(0)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \varphi_T \in L^2(\Omega).$$

Desigualdad de observabilidad

La condición anterior se puede ver como una condición de optimalidad para

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_\Omega y_0 \varphi(0)\,\mathrm{d}x.$$

- J es convexa, continua y coerciva si existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \iint\limits_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

llamada desigualdad de observabilidad.

- El control está dado por

$$v := \widehat{\varphi},$$

donde $\widehat{\varphi}$ es la solución de la ecuación adjunta asociada a $\widehat{\varphi}_T$, mínimo de J.

Desigualdades de Carleman

¿Cómo demostramos la desigualdad de observabilidad?

Una de las herramientas más poderosas son las desigualdades de Carleman:

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq C \iint_{\Omega\times(0,T)} \rho|\varphi_t + \Delta\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C \iint_{\omega\times(0,T)} \rho|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

- $\varphi(x,t) = 0$, $x \in \partial\Omega$.
- $\rho = \rho(x,t)$ es una función positiva y continua en $\overline{\Omega} \times (0,T)$.
- Para deducir observabilidad, la combinamos con propiedades de disipación como
$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\varphi(t)|^2 \,\mathrm{d}x, \quad t \in (0,T).$$

Algunos comentarios

- Control a cero y observabilidad de la ecuación adjunta son equivalentes.
- Además, si existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\varphi(0)|^2 \, \mathrm{d}x \le C \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,$$

  entonces el control v tal que $y(T) = 0$ satisface

$$\|v\|_{L^2}^2 \le C\|y_0\|_{L^2}^2.$$

- La mejor constante C_{cost} (la más pequeña) que hace la desigualdad anterior cierta, la denominamos costo del control a cero o costo de la controlabilidad a cero.

Agenda

Costo del control a cero en un caso límite

Consideremos la ecuación de calor en una dimensión

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,L), \\ y_{|x=0} = v(t), \quad y_{|x=L} = 0 & \text{en } (0,T), \\ y_{|t=0} = y_0 & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

- $\varepsilon > 0$, $M \neq 0$.
- Existe $v^\varepsilon(t)$ tal que $y(T) = 0$ y existe $C^\varepsilon > 0$ tal que

$$\|v^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T)} \leq C^\varepsilon \|y_0\|^2_{L^2(0,L)}.$$

- $C^\varepsilon_{cost} \leq C^\varepsilon$.

Pregunta: ¿Qué podemos esperar de C^ε_{cost} cuando $\varepsilon \to 0^+$?
En general, para $T > 0$ y $\varepsilon > 0$, se puede probar

$$C^\varepsilon_{cost} \leq \exp\left(CT^{-1}\varepsilon^{-1}\right),$$

pero esto no dice mucho...

Sobre el control de la ecuación del transporte

Para entender un poco lo que se espera de C^{ε}_{cost} cuando $\varepsilon \to 0^+$, consideremos la ecuación del transporte ($\varepsilon = 0$)

$$\begin{aligned} y_t - M y_x &= 0 && \text{en } (0,T)\times(0,L), \\ y_{|t=0} &= y_0 && \text{en } (0,L) \end{aligned}$$

con controles:

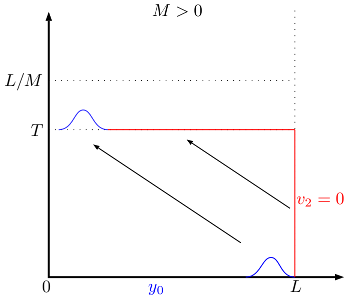
$$\begin{aligned} y_{|x=0} &= v_1(t) && \text{si } M < 0, \\ y_{|x=L} &= v_2(t) && \text{si } M > 0. \end{aligned}$$

- La ecuación del transporte es controlable si y sólo si $T \geq L/|M|$.

Sobre el control de la ecuación del transporte

$$y_t - My_x = 0 \text{ en } (0,T)\times(0,L)$$

- $T < L/|M|$

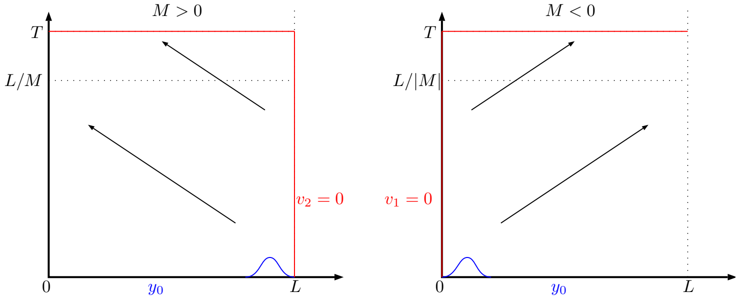


- $C_{cost} = +\infty$
- Entonces, es natural esperar que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} C^{\varepsilon}_{cost} = +\infty$

Sobre el control de la ecuación del transporte

$$y_t - My_x = 0 \text{ en } (0,T)\times(0,L)$$

- $T > L/|M|$



- $C_{cost} = 0$
- Entonces, es natural esperar que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} C^{\varepsilon}_{cost} = 0$

Algunos resultados

- Para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,L), \\ y_{|x=0} = v(t), \quad y_{|x=L} = 0 & \text{en } (0,T), \end{cases}$$

Coron, Guerrero (2005) probaron

1. $T < L/|M|$: $C^{\varepsilon}_{cost} \geq \exp(C\varepsilon^{-1})$ si $M \neq 0$.
2. $T \geq KL/|M|$: $C^{\varepsilon}_{cost} \leq \exp(-C\varepsilon^{-1})$ si $K > 0$ grande (contr. uniforme).

Además:

- Si $M > 0$ y $T < 2\sqrt{2}L/M$: C^{ε}_{cost} explota (Lissy, 2015).
- Si $M < 0$: $K = 4.2$ y si $M > 0$: $K = 6.1$ (Glass, 2010).

En particular, no se sabe qué pasa

- si $T \in (L/|M|, 4.2L/|M|)$ si $M < 0$, o
- si $T \in (2\sqrt{2}L/M, 6.1L/M)$ si $M > 0$.

Algunos resultados

- Para la ecuación de KdV:

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,L), \\ y_{|x=0} = v(t), \quad y_{|x=L} = 0, \quad y_{x|x=L} = 0 & \text{en } (0,T), \end{cases}$$

Glass, Guerrero (2009) probaron

1. $T < L/|M| \,:\, C^{\varepsilon}_{cost} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2})$ si $M \neq 0$.
2. $T \geq KL/M \,:\, C^{\varepsilon}_{cost} \leq \exp(-C\varepsilon^{-1/2})$ si $M > 0, K > 0$ grande (c.u.).

- Para la ecuación de KdV:

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,L), \\ y_{|x=0} = v(t), \quad y_{x|x=L} = 0, \quad y_{xx|x=L} = 0 & \text{en } (0,T), \end{cases}$$

C., Guerrero (2015):

1. $T < L/|M| \,:\, C^{\varepsilon}_{cost} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2})$ si $M < 0$.
2. $\forall T > 0 \,:\, C^{\varepsilon}_{cost} \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2})$ si $M > 0$.

Algunos resultados

- Para una ecuación de cuarto orden:

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0,T)\times(0,L), \\ y_{|x=0} = v_1(t), \quad y_{|x=L} = 0 & \text{en } (0,T), \\ y_{xx|x=0} = v_2(t), \quad y_{xx|x=L} = 0 & \text{en } (0,T), \\ y_{|t=0} = y_0, & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

  - Control a cero (Cerpa, Mercado, Guzmán): existen $v_1^\varepsilon(t)$, $v_2^\varepsilon(t)$ tal que $y(T) = 0$ y existe $C^\varepsilon > 0$ tal que

$$\|v_1^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T)} + \|v_2^\varepsilon\|^2_{L^2(0,T)} \leq C^\varepsilon \|y_0\|^2_{L^2(0,L)}.$$

  - C., Guzmán (2015):
    - $T \geq 40L/|M|$: $\lim_{\varepsilon\to 0^+} C^\varepsilon_{cost} = 0$.
    - $T < L/|M|$: $\lim_{\varepsilon\to 0^+} C^\varepsilon_{cost} = +\infty$.

Pregunta abierta: ¿Qué pasa si $T \in (L/|M|, 40L/|M|)$?

Agenda

Algunos sistemas de la mecánica de fluidos ($N = 2$ ó 3)

- Ecuaciones de Navier-Stokes (N controles escalares)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v\mathbb{1}_\omega, \quad \nabla \cdot y = 0 & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

  - $y = y(x,t) \in \mathbb{R}^N$: Campo de velocidades del fluido.
  - $v \in \mathbb{R}^N$ es el control. Puede ser pensado como un mecanismo que inyecta movimiento al sistema en distintas direcciones.

- Sistema de Boussinesq ($N + 1$ controles escalares)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v\mathbb{1}_\omega + \theta\, e_N, \quad \nabla \cdot y = 0 & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \theta_t - \Delta\theta + y \cdot \nabla\theta = v_0\mathbb{1}_\omega & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = 0, \quad \theta = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

  - $\theta = \theta(x,t) \in \mathbb{R}$: Temperatura del fluido.
  - $v_0 \in \mathbb{R}$: control actuando sobre la temperatura.

Pregunta: ¿Es posible controlar estos sistemas con menos controles?

Control de un sistema de dos ecuaciones del calor con un control

Consideremos el sistema con un solo control

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = z + v\mathbb{1}_\omega & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ z_t - \Delta z = y & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = z = 0 & x \in \partial\Omega, \\ y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0 & x \in \Omega. \end{cases}$$

- Buscamos v tal que $y(T) = z(T) = 0$.
- Desigualdad de observabilidad: Existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega \left(|\varphi(0)|^2 + |\psi(0)|^2\right) \mathrm{d}x \le C \iint_{\omega\times(0,T)} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

donde (φ,ψ) es la solution del sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = \psi & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ -\psi_t - \Delta\psi = \varphi & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \varphi = \psi = 0 & x \in \partial\Omega, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \quad \psi(T) = \psi_T & x \in \Omega. \end{cases}$$

Control de un sistema de dos ecuaciones del calor con un control

- La idea es combinar desigualdades de Carleman para φ y ψ:

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho_1|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq C \iint_{\Omega\times(0,T)} \rho_2|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\iint_{\Omega\times(0,T)} \rho_1|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq C \iint_{\Omega\times(0,T)} \rho_2|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Podemos elegir los pesos tal que $\rho_2 \leq \dfrac{1}{4C}\rho_1$, pero necesitamos estimar el término local de ψ. Usamos la ecuación $(\psi = -\varphi_t - \Delta\varphi)$

$$\iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1\psi(-\varphi_t - \Delta\varphi) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \frac{1}{8C} \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1|\psi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C \iint_{\omega\times(0,T)} \rho_1|\varphi|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Control de un sistema de dos ecuaciones del calor con un control

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = z + v\mathbb{1}_\omega & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ z_t - \Delta z = y & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = z = 0 & x \in \partial\Omega, \\ y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0 & x \in \Omega. \end{cases}$$

- Existe v tal que $y(T) = z(T) = 0$.

Variante: Sistemas acoplados por $\mathcal{O} \subset \Omega$.

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = z + v\mathbb{1}_\omega & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ z_t - \Delta z = y\mathbb{1}_{\mathcal{O}} & (x,t) \in \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

- En este caso, si $\mathcal{O} \cap \omega \neq \emptyset$, entonces existe v tal que $y(T) = z(T) = 0$.

Controlabilidad local a cero del sistema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = v \mathbb{1}_\omega, \quad \nabla \cdot y = 0 & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & x \in \partial\Omega \\ y(0) = y^0 & x \in \Omega. \end{cases}$$

- $i_0 \in \{1, \dots, N\}$, $T > 0$ y $\omega \subset \Omega$.
- C. Guerrero (2012): Existe $\delta > 0$ tal que si $\|y^0\| \leq \delta$, entonces existe un control v, con $v_{i_0} \equiv 0$, y una solución asociada (y,p) tal que $y(T) = 0$.

Idea:

- Linealizar en torno a cero: $y_t - \Delta y + \nabla p = v \mathbb{1}_\omega$.
- Controlar las ecuaciones con control y la restante con la condición

$$\nabla \cdot y = \partial_1 y_1 + \ldots + \partial_N y_N = 0.$$

- Lissy (2014): Control local a cero con un control escalar en dimesión 3.

Sistema de Boussinesq

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y\cdot\nabla)y + \nabla p = v\mathbb{1}_\omega + \theta\, e_N, \quad \nabla\cdot y = 0 & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \theta_t - \Delta\theta + y\cdot\nabla\theta = v_0\mathbb{1}_\omega & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ y = 0, \quad \theta = 0 & x\in\partial\Omega \\ y(0) = y^0, \quad \theta(0) = \theta^0 & x\in\Omega. \end{cases}$$

- $i_0 \in \{1,\ldots,N-1\}$, $T>0$ y $\omega\subset\Omega$.
- C. (2012) Existe $\delta>0$ tal que si $\|(y^0,\theta^0)\|\leq\delta$, existen controles v_0 y v, con $v_{i_0}\equiv v_N\equiv 0$, y una solución asociada (y,p,θ) tal que

$$y(T)=0 \text{ y } \theta(T)=0.$$

Gracias