

Sobre el costo del control a cero de algunas ecuaciones en derivadas parciales lineales

Nicolás Carreño

Universidad Técnica Federico Santa María

XXX Jornada de Matemática de la Zona Sur
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Sesión Ecuaciones Diferenciales Parciales y Teoría de Control

28 de Abril, 2017

Agenda

Introducción

I. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de KdV lineal

II. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de cuarto orden

Problemas abiertos

Agenda

Introducción

I. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de KdV lineal

II. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de cuarto orden

Problemas abiertos

Motivación: Un modelo de quimiotaxis

- Modelo simple para quimiotaxis (Keller-Segel)

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = -\nabla \cdot (z \nabla y) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ -\Delta z = y - z + u \mathbb{1}_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases}$$

- Sistema parabólico-elíptico que se aproxima por uno parabólico con un parámetro $\varepsilon > 0$ pequeño:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = -\nabla \cdot (z \nabla y) & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \varepsilon z_t - \Delta z = y - z + u^\varepsilon \mathbb{1}_\omega & \text{en } (0, T) \times \Omega. \end{cases}$$

- Idea: Hacer $\varepsilon \rightarrow 0$. Es importante estudiar cómo u^ε se comporta en el límite. En particular, ¿existen estimaciones de u^ε independientes de ε ?

Introducción

En esta charla, discutiremos el costo de controlar a cero dos ecuaciones lineales:

1. Una ecuación de KdV

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{x=0} = v(t), \quad y|_{x=L} = 0, \quad y_{xx}|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

2. Una ecuación de cuarto orden

$$\begin{cases} z_t + \varepsilon z_{xxxx} - M z_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ z|_{x=0} = v_1(t), \quad z|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ z_{xx}|_{x=0} = v_2(t), \quad z_{xx}|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ z|_{t=0} = z_0, & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Nos preguntamos cómo varía el tamaño de los controles con respecto a $\varepsilon > 0$.
En particular, cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Introducción

El costo de controlar a cero lo mediremos como la mejor constante C_{cost}^ε tal que

1. para todo y_0 , existe v^ε tal que $y|_{t=T} = 0$, y

$$\|v^\varepsilon\| \leq C_{cost}^\varepsilon \|y_0\|.$$

2. para todo z_0 , existen v_1^ε y v_2^ε tal que $z|_{t=T} = 0$, y

$$\|v_1^\varepsilon\| + \|v_2^\varepsilon\| \leq C_{cost}^\varepsilon \|z_0\|.$$

Pregunta: ¿Qué podemos esperar a priori de C_{cost}^ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$?

Sobre el control de la ecuación del transporte

Para entender un poco lo que se espera de C_{cost}^ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, consideremos la ecuación del transporte ($\varepsilon = 0$)

$$\begin{aligned} y_t - M y_x &= 0 && \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{t=0} &= y_0 && \text{en } (0, L) \end{aligned}$$

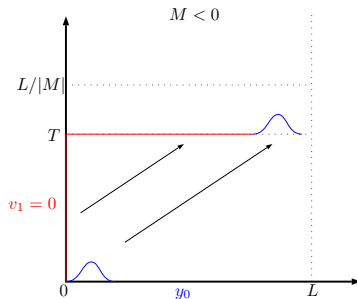
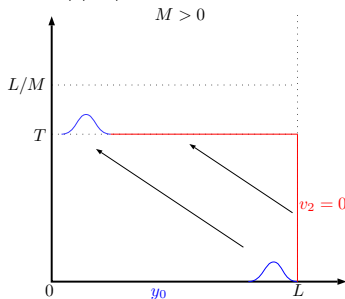
con controles:

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= v_1(t) && \text{si } M < 0, \\ y|_{x=L} &= v_2(t) && \text{si } M > 0. \end{aligned}$$

- La ecuación del transporte es controlable si y sólo si $T \geq L/|M|$.

$$y_t - My_x = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, L)$$

- ▶ $T < L/|M|$



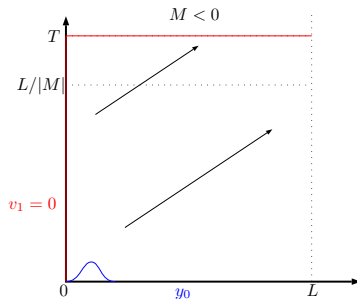
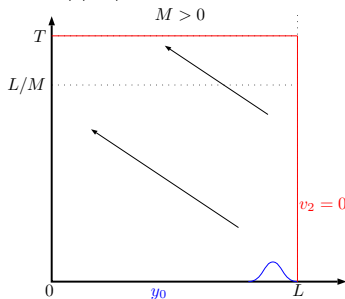
- ▶ $C_{cost} = +\infty$

► Entonces, es natural esperar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_{cost}^\varepsilon = +\infty$

Sobre el control de la ecuación del transporte

$$y_t - My_x = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, L)$$

- $T > L/|M|$



- $C_{cost} = 0$
- Entonces, es natural esperar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_{cost}^\varepsilon = 0$

Algunos resultados

- Para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{x=0} = v(t), \quad y|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \end{cases}$$

Coron, Guerrero (2005) probaron

1. $T < L/|M| : C_{cost}^\varepsilon \geq \exp(C\varepsilon^{-1})$ si $M \neq 0$.
 2. $T \geq KL/|M| : C_{cost}^\varepsilon \leq \exp(-C\varepsilon^{-1})$ si $K > 0$ grande (contr. uniforme).
- Para la ecuación de KdV clásica:

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{x=0} = v(t), \quad y|_{x=L} = 0, \quad y_x|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \end{cases}$$

Glass, Guerrero (2009) probaron

1. $T < L/|M| : C_{cost}^\varepsilon \geq \exp(C\varepsilon^{-1/2})$ si $M \neq 0$.
2. $T \geq KL/M : C_{cost}^\varepsilon \leq \exp(-C\varepsilon^{-1/2})$ si $M > 0, K > 0$ grande (c.u.).

Agenda

Introducción

I. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de KdV lineal

II. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de cuarto orden

Problemas abiertos

Una ecuación de KdV en un intervalo acotado

- ▶ $T > 0$, $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (coeficiente de transporte), $\varepsilon > 0$ (coeficiente de dispersión).

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{x=0} = v(t), \quad y_x|_{x=L} = 0, \quad y_{xx}|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ y|_{t=0} = y_0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

- ▶ Controlabilidad ha sido estudiada por Guilleron (2014) y Cerpa, Rivas, Zhang (2013).
- ▶ Control a cero: Para todo $y_0 \in L^2(0, L)$, existe $v \in L^2(0, T)$ tal que $y|_{t=T} = 0$, y existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(0, T)} \leq C \|y_0\|_{L^2(0, L)}.$$

- ▶ En particular, $C_{cost}^\varepsilon \leq C$.

Dualidad

Equivalentemente, C_{cost}^ε es la mejor constante tal que la desigualdad de observabilidad

$$\|\varphi|_{t=0}\|_{L^2(0,L)} \leq \varepsilon C_{cost}^\varepsilon \|\varphi_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)},$$

es cierta para toda φ solución de la ecuación adjunta

$$\begin{cases} -\varphi_t - \varepsilon \varphi_{xxx} + M\varphi_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ \varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi_x|_{x=0} = 0, \quad (\varepsilon \varphi_{xx} - M\varphi)|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ \varphi|_{t=T} = \varphi^T & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

Es natural concentrarse en analizar la desigualdad de observabilidad.

- En general, para $T > 0$ y $\varepsilon > 0$, se puede probar (mediante desigualdades de Carleman)

$$C_{cost}^\varepsilon \leq \exp(CT^{-1}\varepsilon^{-1}).$$

¿Es posible obtener controlabilidad uniforme con respecto a $\varepsilon \rightarrow 0^+$?

- ▶ $\dot{C}_{cost}^\varepsilon \leq C_\varepsilon \exp(-C(T, M)\varepsilon^{-1/2})$, T suficientemente grande?
 C_ε puede depender polinomialmente de ε y ε^{-1} .
- ▶ Una estrategia posible es combinar una desigualdad de observabilidad:

$$\|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(CT^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}) \|\varphi_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

con una disipación exponencial ($M > 0$ (transporte negativo), T grande):

$$\|\varphi|_{t=0}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(-CT\varepsilon^{-1/2}) \|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)}.$$

- ▶ Observabilidad OK. Mejora de $\exp(C\varepsilon^{-1})$ ^{Guilleron(2014)} a $\exp(C\varepsilon^{-1/2})$.
- ▶ Disipación no es posible.

¿Es posible obtener controlabilidad uniforme con respecto a $\varepsilon \rightarrow 0^+$?

- ▶ ¿ $C_{cost}^\varepsilon \leq C_\varepsilon \exp(-C(T, M)\varepsilon^{-1/2})$, T suficientemente grande?
 C_ε puede depender polinomialmente de ε y ε^{-1} .
- ▶ Una estrategia posible es combinar una desigualdad de observabilidad:

$$\|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(CT^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}) \|\varphi_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

con una disipación exponencial ($M > 0$ (transporte negativo), T grande):

$$\|\varphi|_{t=0}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(-CT\varepsilon^{-1/2}) \|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)}.$$

- ▶ Observabilidad OK. Mejora de $\exp(C\varepsilon^{-1})$ ^{Guilleron(2014)} a $\exp(C\varepsilon^{-1/2})$.
- ▶ Disipación no es posible.

¿Es posible obtener controlabilidad uniforme con respecto a $\varepsilon \rightarrow 0^+$?

- ▶ $\mathcal{C}_{cost}^\varepsilon \leq C_\varepsilon \exp(-C(T, M)\varepsilon^{-1/2})$, T suficientemente grande?
 C_ε puede depender polinomialmente de ε y ε^{-1} .
- ▶ Una estrategia posible es combinar una desigualdad de observabilidad:

$$\|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(CT^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}) \|\varphi_{xx}|_{x=0}\|_{L^2(0,T)}$$

con una disipación exponencial ($M > 0$ (transporte negativo), T grande):

$$\|\varphi|_{t=0}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(-CT\varepsilon^{-1/2}) \|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)}.$$

- ▶ Observabilidad OK. Mejora de $\exp(C\varepsilon^{-1})$ ^{Guilleron(2014)} a $\exp(C\varepsilon^{-1/2})$.
- ▶ Disipación no es posible.

Resultado de explosión para T arbitrario

Teorema¹. Sea $T, L, M > 0$ and $\delta \in (0, 1)$. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$C_{cost}^\varepsilon \geq C_\varepsilon \exp((1 - \delta)LM^{1/2}\varepsilon^{-1/2}), \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

donde C_ε depende polinomialmente de ε^{-1} y ε .

- ▶ Problema de control auxiliar con costo K_{cost}^ε y tal que $K_{cost}^\varepsilon \lesssim C_{cost}^\varepsilon$.
- ▶ Se muestra que $K_{cost}^\varepsilon \geq C_\varepsilon \sinh((1 - \delta)LM^{1/2}\varepsilon^{-1/2})$ mediante una solución particular para su ecuación adjunta.
- ▶ $\hat{\psi}(x) := \cosh((x - \delta L)M^{1/2}\varepsilon^{-1/2})$.

¹C., Guerrero. On the non-uniform null controllability of a linear KdV equation. *Asymptot. Anal.*, 2015.

Agenda

Introducción

I. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de KdV lineal

II. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de cuarto orden

Problemas abiertos

Una ecuación de cuarto orden lineal

- $T > 0$, $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (coeficiente de transporte), $\varepsilon > 0$ (coeficiente de difusión).

$$\begin{cases} z_t + \varepsilon z_{xxxx} - M z_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ z|_{x=0} = v_1(t), \quad z|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ z_{xx}|_{x=0} = v_2(t), \quad z_{xx}|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ z|_{t=0} = z_0, & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

- Resultados de controlabilidad por Cerpa, Mercado, Guzmán.
- Control a cero: Para todo $z_0 \in L^2(0, L)$, existen $v_1 \in L^2(0, T)$ y $v_2 \in L^2(0, T)$ tal que $z|_{t=T} = 0$, y existe $C > 0$ tal que

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} \leq C \|y_0\|_{L^2(0,L)}.$$

- En particular, $C_{cost}^\varepsilon \leq C$.

Dualidad

Ecuación adjunta:

$$\begin{cases} -\varphi_t + \varepsilon \varphi_{xxxx} + M \varphi_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ \varphi|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ \varphi_{xx}|_{x=0} = 0, \quad \varphi_{xx}|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ \varphi|_{t=T} = \varphi_T, & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

► Observabilidad:

$$\|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(CT^{-1/3} \varepsilon^{-1/3}) (\|\varphi_{x|x=0}\|_{L^2(0,T)} + \|\varphi_{xxx|x=0}\|_{L^2(0,T)})$$

► Disipación exponencial (T grande):

$$\|\varphi|_{t=0}\|_{L^2(0,L)} \leq C_\varepsilon \exp(-CT\varepsilon^{-1/3}) \|\varphi|_{t=T/2}\|_{L^2(0,L)}.$$

• Observabilidad: Mejora de $\exp(C\varepsilon^{-1})$ a $\exp(C\varepsilon^{-1/3})$.

Resultados de controlabilidad uniforme y explosión²

Teorema (Controlabilidad uniforme). Sea $L > 0$, $M \neq 0$ y $T \geq 40L/|M|$. Entonces, para todo $z_0 \in L^2(0, L)$, existen $v_1, v_2 \in L^2(0, T)$ tales que $z|_{t=T} = 0$ y

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} \leq C_\varepsilon \exp(-C\varepsilon^{-1/3}) \|y_0\|_{L^2(0,L)}.$$

En particular: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} C_{cost}^\varepsilon = 0$.

Teorema (Explosión). Sea $L > 0$, $M \neq 0$ y $T < L/|M|$. Entonces, existen $z_0 \in L^2(0, L)$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que todo par de controles $v_1, v_2 \in L^2(0, T)$ tales que $z|_{t=T} = 0$ satisfacen

$$\|v_1\|_{L^2(0,T)} + \|v_2\|_{L^2(0,T)} \geq C_\varepsilon \exp(C\varepsilon^{1/3}) \|y_0\|_{L^2(0,L)}, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

En particular: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} C_{cost}^\varepsilon = +\infty$.

²C., Guzmán. On the cost of null controllability of a linear fourth order parabolic equation. *J. Differential Equations*, 2017.

Agenda

Introducción

I. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de KdV lineal

II. Sobre la controlabilidad uniforme de una ecuación de cuarto orden

Problemas abiertos

Problemas abiertos

- Dos controles en KdV

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon y_{xxx} - M y_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{x=0} = v_0(t), \quad y_{x|_{x=L}} = v_1(t), \quad y_{xx|_{x=L}} = v_2(t) & \text{en } (0, T), \\ y|_{t=0} = y_0, \quad y|_{t=T} = 0 & \text{en } (0, L). \end{cases}$$

¿Qué pasa en los siguiente casos?

1. $v_0(t) = 0$: Parcialmente resuelto (restricciones sobre y_0).
2. $v_1(t) = 0$: Parcialmente resuelto (restricciones sobre y_0)³.
3. $v_2(t) = 0$: Abierto.

³C., Guerrero. Uniform null controllability of a linear KdV equation using two controls. *Enviado*.

Problemas abiertos

- $M > 0$ (transporte negativo) y $T > 0$ pequeño.

- ▶ Para la ecuación del calor

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} - M y_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ y|_{x=0} = v(t), \quad y|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \end{cases}$$

se ha probado que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_{cost}^\varepsilon = +\infty$, si $T < 2\sqrt{2}L/M$.

- ▶ Para la ecuación

$$\begin{cases} z_t + \varepsilon z_{xxxx} - M z_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, L), \\ z|_{x=0} = v_1(t), \quad z|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T), \\ z_{xx}|_{x=0} = v_2(t), \quad z_{xx}|_{x=L} = 0 & \text{en } (0, T). \end{cases}$$

¿Existe $K \in (1, 40)$ tal que si $T < KL/M$, entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_{cost}^\varepsilon = +\infty$?

Gracias