Ayudantía 3

• Encontrar los extramales para el siguiente funcional:

$$\mathcal{J}[y] = \int_0^{\pi/2} ((y^2 + (y')^2 - 2y\sin x)dx$$

con condición $y(0) = 0$ y $y(\frac{\pi}{2})$ libre.
sol: Plantearemos las ecuacines de Euler Lagrange como primer paso. LLamamos $L(x, y, y') = (y^2 + (y')^2 - 2y\sin x$, luego se tiene:

$$L_y = 2y - 2\sin x, \quad L_{y'} = 2y'$$

por lo tanto la ecuación de E-L viene dada por:

$$y'' = y - \sin x$$

La solución homogenea de la EDO es trivial y viene dada por $y_h = A\exp^x + B\exp^{-x}$ y para una solución particular como el lado no homogeneo es una función sinusoidal, basta probar intentar una solución particular de la forma $y_p = C\sin x + D\cos x$, luego derivando $y_p'' - y_p = -2C\sin x - 2Dcosx$, por tanto para que y_p satisfasga la EDO tomar $D = 0$ y $C = \frac{1}{2}$.Finalmente antes de presentar la solución general, la parte homogenea $y_h = A\exp^x + B\exp^{-x}$ se sabe que se puede expresar en terminos de cosenos hiperbolicos y senos hiperbolicos para hacer mas sencilla las evaluaciones fronterizas, por ende la solución homogenea puede escribirse de forma equivalente como $y_h = A\cosh x + B\sinh x$. Así la solución general viene dada por $y = A\cosh x + B\sinh x + \frac{\sin x}{2}$. Por tanto si y^* es un extremal:

$$y^* = A\cosh x + B\sinh x + \frac{\sin x}{2}$$

Por otro lado $0 = y^*(0) = A\cosh 0 + B\sinh 0 + \frac{\sin 0}{2} = A$. Sabemos que $y(\frac{\pi}{2}$ esta libre, es decir, yace en algun lugar de la recta $x = \frac{\pi}{2}$. Sabemos que debemos imponer entonces la segunda condición:

$$L_{y'}(\frac{\pi}{2}, y^*(\frac{\pi}{2}), (y^*)'(\frac{\pi}{2})) = 0$$

Y esto se tiene si $(y^*)'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow B = 0$. Por tanto el extremal viene dado por:

$$y^* = \frac{\sin x}{2}$$

• Ahora considere el mismo problema anterior pero que ambas condiciones de frontera sean libres. Encuentre los extremales para este caso.
sol: Sabemos que si y^* es un extremal este viene dado de forma general por:

$$y^* = A\cosh x + B\sinh x + \frac{\sin x}{2}$$

Ahora debemos encontrar los valores de A y B, como ambos extremos están libres debemos imponer:

$$L_{y'}(0, y^*(0), (y^*)'(0)) = 0, \quad L_{y'}(\frac{\pi}{2}, y^*(\frac{\pi}{2}), (y^*)'(\frac{\pi}{2})) = 0$$

para ello se debe cumplir entonces que $(y^*)'(0) = (y^*)'(\frac{\pi}{2}) = 0$. Lo cual nos lleva a que se debe cumplir que $0 = A\sin h(0) + B\cosh(0) + \frac{\cos(0)}{2} = B + \frac{1}{2}$ y $0 = A\sin h(\frac{\pi}{2}) + B\cosh(\frac{\pi}{2}) + \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{2} =$

$A \sin h(\frac{\pi}{2}) + B\cosh(\frac{\pi}{2})$, Resolviendo se deduce directo que $B = -\frac{1}{2}$ y $A = \frac{1}{2\tanh\frac{\pi}{2}}$

• considere el funcional:

$$J[y,b] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$$

Demuestre que si queremos buscar extremales del tipo $y(0) = 0$ y que $(b, y(b))$ se encuentre en la recta $\phi(x) = x - \alpha$, esta curva esta en la circunferencia de centro $(\alpha, 0)$.

sol: Estamos en un problema de encontrar extremales cuando una de las condiciones finales varia a lo largo de una curva, en este caso una recta. Lo primero es plantear la correspondiente ecuación de Euler Lagrange que forma parte de la variación del funcional.Entonces Llamado $L(x,y,y') = L(y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$ como esta expresión no depende de x podemos usar la ecuación de E-L de la forma:

$$L - y'L_{y'} = C$$

con C alguna constante. Llegando así a la siguiente EDO:

$$C = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} - \frac{(y')^2}{y\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}}$$

Despejando la derivada se tiene que $y' = \frac{\sqrt{D^2-y^2}}{y}$ ó $y' = -\frac{\sqrt{D^2-y^2}}{y}$ con $D = \frac{1}{C}$ Ahora integrando separando las varibles se obtiene que $y = \sqrt{D^2-(x+E)^2}$ ó $y = -\sqrt{D^2-(x+E)^2}$, donde E es una constante de integración. De donde se deduce entonces que si y satisface E-L. se encuentra en la circunferencia $y^2+(x+E)^2 = D^2$. Si y es un extremal para nuestro problema debe cumplir con que $y(0) = 0$ y que el par $(b, y(b))$ se encuentre en la recta $x-5$, imponiendo primero $y(0) = 0$ se tiene que $E = D$, por tanto nuestra curva tiene la forma $y^2+(x+E)^2 = E^2$. Ahora sabemos que la condición que se debe cumplir debe cumplir para problemas que puntos finales sobre una curva es que :

$$(L_{y'}\phi' + L - y'L_{y'})|_{x=b} = 0$$

Recordar que cuando $L(x,y,y') = f(x,y)\sqrt{1+(y')^2}$ entonces la condicion de arriba se remite a que $y'(b) = -\frac{1}{\phi'(b)} = -1$...(*). Primero notemos que como $y^2+(x+E)^2 = E^2$, podemos derivar implicitamente dando como resultado que $2yy' + 2(x+E) = 0$...(**). Ahora notemos ademas que el punto final debe estar en la curva $\phi(x) = x - \alpha$ por lo tanto $y(b) = b - \alpha$, usando este hecho y usando también (*) en (**) se deriva la siguiente ecuación: $0 = 2y(b)y'(b) + 2(x+E) = 2(b-\alpha)(-1) + 2(b+E)$. Por otro lado el par $(b, y(b))$ debe satisfacer la ecuación de la circunferencia por lo tanto $E^2 = y(b)^2 + (b+E)^2 = (b-\alpha)^2 + (b+E)^2$.Resolviendo este sistema de ecuaciones para b y E se llega a que $E = -\alpha$ y $b = \alpha + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ ó $b = \alpha - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.Finalmente la solución satisface $y^2 + (x-\alpha)^2 = \alpha^2$.

• Ahora considere el mismo funcional anterior, pero se pide que el extremo final este sobre la circunferencia $(x-9)^2 + \phi^2 = 9$

sol: De la misma forma que en el problema anterior se llega a que un extremal cumple con $y^2 + (x+E)^2 = E^2$, Ahora hay que determinar el valor de E. Igual que antes también se debe tener que $y'(b) = -\frac{1}{\phi'(b)}$. Notar que derivando implicitamente la ecuación de la circunferencia llegamos a que $\phi'(b) = -\frac{(x-9)}{\phi(b)} = -\frac{(x-9)}{y(b)}$ la última igualdad se debe a que estamos en el extremo para la curva y y este está en la curva ϕ. Por lo tanto se tiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{y'(b)(x-9)}{y(b)} + 1 = 0 \quad (1)$$

Notamos ademas que $(b, y(b))$ satisface la ecuación $y^2 + (x+E)^2 = E^2$ por lo tanto $y(b)^2 + (b+E)^2 = E^2$ y además $(b, y(b))$ yace sobre la otra ecuación de la circunferencia, por ende cumple $(b-9)^2 + y(b)^2 = 9$. De estas dos ecuaciones se despeja b llegando a que $b = \frac{36}{E+9}$. Notar ademas que derivando implicitamente ecuación $y^2+(x+E)^2 = E^2$ se llega a que $y(b)y'(b)+(b+E)=0$, usando este hecho y (1) se concluye que $b = \frac{9E+72}{E+9}$. Finalmente igualando las dos expresiones para b se llega a que $E=-4$ y $b=\frac{36}{5}$.

• Considere el $J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx + H(a, b, y(a), y(b))$, encontrar la variacion general.

sol: Pendiente a escribir