Ayudantía 1

• Sea el funcional a minimizar:

$$J(u) = \int_0^T L(t, u(t), u'(t))dt$$

Con L continua. Suponga que es posible encontrar una sucesión minimizante $u_n(t)$ regular (para un espacio admisible de funciones validos) que converge a una función u en $C^1[0,T]$ (es decir que las funciones y derivadas converjan uniformente) entonces u es solución del problema.
• Encontrar las trayectorias extremales de:

$$\mathcal{J}(x) = \int_{-1}^0 ((x')^2 - 12tx)dt$$

con condiciones de frontera $x(-1) = 1$, $x(0) = 0$
• Demostrar que el funcional $J(u) = \int_0^1 t[u'(t)]dt$ no alcanza el ínfimo en las funciones absolutamente continuas (por ejemplo Holder continuas también) que cumplen $u(0) = 1$, $u(1) = 0$.
• Sea Ω un abierto acotado de $\mathcal{R}^N$. Consideremos el siguiente espacio de funciones admisibles:

$$\mathcal{M} = \{v \in C^2(\Omega) : v(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega\}$$

y considere el funcional:

$$\mathcal{J}(v) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx$$

Pruebe que u es un extremal ssi u es armonica con condición de frontera g
• Considere una función $L(x,z,p)$, donde $x \in \overline{\Omega} \subset \mathcal{R}^N$, $z \in \mathcal{R}$ y $p \in \mathcal{R}^N$ con Ω abierto y acotado y L toma valores reales. La idea de este ejercicio es encontrar las ecuaciones E-L para el problema de minimización:

$$\begin{cases} \min & J(u) = \int_\Omega L(x,u,\nabla u)dx \\ s.t & u = 0, \quad en \quad \partial\Omega \end{cases}$$

La cual viene dada por:

$$-\sum_{i=0}^N (L_{p_i}(x,u,\nabla u))_{x_i} + L_z(x,u,\nabla u) = 0$$

• Problema del tunel mas rápido: Supongamos que podemos construir un tunel a través de la corteza terrestre conectando dos cuidades que llamremos X e Y. Consideremos que el tunel no tiene fricción (osea es una idealización mas falsa que el viejo pascuero). Entonces un tren partiendo de la ciudad X con velocidad 0 (si la curva que describe el tunel es buena) podra llegar a la ciudad Y con velocidad 0 sin nisiquiera usar combustible... "al vuelo"...La idea es determinar la forma del tunel que será atravezado en el menor tiempo posible!.

• Determinación de la ecuación de Euler-Lagrange para caso en que las funciones no sean C^1 sino Lipschitz (Pregunta 1 del certamen pasado, ejercicio orientado en cuatro pasos). (Tarea)