Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016-01

Profesor: Nicolás Carreño
Ayudante: Andrés Sandoval

TAREA 2
MAT-276: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Fecha de entrega: Martes 5 de Julio, 2016 (comienzo certamen 2).

Problema 1. Considere el sistema lineal controlado en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + (\alpha - 3)x_2 + u_1 + u_2 \\ x_2' = 2x_2 + (\alpha^2 - \alpha)u_1. \end{cases}$$

Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema anterior sea controlable.

Problema 2. Considere el sistema lineal no-autónomo en $\mathbb{R}^N$

$$x' = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0,$$

donde $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Sea $R = R(t)$ la matriz resolvente del sistema homogéneo $x' = A(t)x$.

(a) Sean $x_1 \in \mathbb{R}^N$ y $T > 0$. Demuestre que el control dado por

$$u^*(t) := B(t)^T R(t)^{-T} C(T)^{-1} R(T)^{-1}(x_1 - R(T)x_0)$$

conduce el sistema de x_0 a x_1 en tiempo T, donde $C(T)$ es la matriz Gramiana.

(b) Demuestre que si $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ es un control que conduce el sistema de x_0 a x_1 en tiempo T, entonces

$$\int_0^T |u^*(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \int_0^T |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

con igualdad si y sólo si $u \equiv u^*$.

Hint: Defina $v := u - u^*$ y pruebe que

$$\int_0^T R(t)^{-1} B(t) v(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

y, en consecuencia,

$$\int_0^T u^*(t)^T v(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

(c) Construya el control de norma $L^2(0, T)$ de norma mínima para el oscilador armónico simple

$$x'' + x = u, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

de modo que lleve el sistema al reposo en el origen.

Problema 3. Muestre que el sistema

$$\begin{cases} x_1' = tx_1 + x_2 \\ x_2' = t^3 x_2 + u \\ x_3' = t^2 x_3 + u \end{cases}$$

es controlable en todo tiempo $T > 0$.

Problema 4. Sea el sistema lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2 + u \end{cases}$$

donde $|u(t)| \leq 1$. Determine la estrategia de control óptima que lleve el sistema desde el origen al estado $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, en tiempo mínimo. En particular, se pide

(a) Determinar la forma del control óptimo y la cantidad de cambios de signo.
(b) Realizar un bosquejo de las trayectorias en el espacio de fase con los posibles valores de u óptimo. Para este paso, puede usar ayuda computacional.
(c) Describir la estrategia de tiempo mínimo, diferenciando los casos $a > 0$ y $a < 0$, usando el espacio de fase.

¿Es posible llevar cualquier punto en el plano (a, b) al eje X en tiempo mínimo?

Problema 5. Considere el *carro-cohete* modelado por la ecuación

$$x'' = u, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Se pretende maximizar la distancia recorrida en un tiempo fijo $T > 0$ de manera de utilizar la menor energía posible de los propulsores y minimizar la velocidad del carro. Para esto, considere el costo

$$C(u) = -x(T) + \int_0^T \left(|x'(t)|^2 + |u(t)|^2\right) \mathrm{d}t$$

y encuentre el par óptimo (x, u) asociado a este problema de minimización.

Problema 6. Considere la ecuación controlada

$$x' = \frac{1}{2}x + u, \quad x(0) = x_0$$

con el costo

$$C(u) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}e^{-t}|x(t)|^2 + 2e^{-t}|u(t)|^2\right) \mathrm{d}t.$$

Encuentre el valor mínimo del costo en función de x_0 y el control asociado en función de la trayectoria.