Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016-01

Profesor: Nicolás Carreño
Ayudante: Andrés Sandoval

TAREA 1
MAT-276: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Fecha de entrega: Viernes 13 de Mayo, 2016 (comienzo certamen 1).

Problema 1. Encuentre los extremales para los siguientes funcionales:

(a) $J(y) = \int_0^1 \big(y^2 + (y')^2 + 2ye^x\big)\,\mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

(b) $J(y) = \int_1^e \big(x(y')^2 + yy'\big)\,\mathrm{d}x$, $y(1) = 0$, $y(e) = 1$.

(c) $J(y) = \int_0^1 \big(\frac{1}{2}(y')^2 + yy' + y' + y\big)\,\mathrm{d}x$, $y(0)$, $y(1)$ libres.

(d) $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x}\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x$.

(e) $J(y, z) = \int_0^2 \big((y')^2 + (z')^2 + y'z'\big)\,\mathrm{d}x, y(0) = 0$, $z(0) = 2$, $y(2) = 4$, $z(2) = 0$.

(f) $J(y) = \int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x = 2$.

(g) $J(y) = \int_0^3 (y')^2(3 - y')^2\,\mathrm{d}x$, $y(0) = 1$, $y(3) = 4$, de modo que el extremal tenga sólo una "esquina".

En cada caso, determine si es posible asegurar si el extremal en cuestión corresponde a un máximo o mínimo.

Problema 2. Considere el funcional

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

y suponga que la curva $y = y(x)$ es escrita es forma paramétrica: $(x(t), y(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.

(a) Muestre que $J(y)$ se puede escribir de la forma

$$K(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,\mathrm{d}t,$$

donde $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $\dot{f} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. Determine Φ en función de L.

(b) Pruebe que

$$\dot{x}\Big(\Phi_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\dot{x}}\Big) + \dot{y}\Big(\Phi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\dot{y}}\Big) = 0.$$

Problema 3. El objetivo de esta pregunta es obtener condiciones necesarias para extremos de funcionales de la forma

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x,$$

donde suponemos que $L = L(x, y, y', y'')$ tiene derivadas de primer y segundo orden continuas con respecto a sus variables. Para esto, dividiremos el problema en cuatro partes:

Parte 1. *Resultados técnicos.*

Sea $C_0^2(x_0, x_1) = \{h \in C^2(x_0, x_1) :\ h(x_0) = 0,\ h'(x_0) = 0,\ h(x_1) = 0,\ h'(x_1) = 0\}$.

(a) Pruebe que si $\eta \in C(x_0, x_1)$ es tal que

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) h''(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $h \in C_0^2(x_0, x_1)$, entonces $\eta(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que si $\alpha \in C(x_0, x_1)$, $\beta \in C^1(x_0, x_1)$ y $\gamma \in C(x_0, x_1)$ son tales que

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(\alpha(x)h(x) + \beta(x)h'(x) + \gamma(x)h''(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $h \in C_0^2(x_0, x_1)$, entonces $\gamma \in C^2(x_0, x_1)$ y, además, $\gamma''(x) = \beta'(x) - \alpha(x)$.

Parte 2. *Extremos fijos.*

En esta parte, suponemos que $y = y(x)$ es un extremo de J sujeto a las condiciones de borde:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y_1'.$$

(a) Pruebe, usando el método que estime conveniente, que

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(L_y(x, y, y', y'')h(x) + L_{y'}(x, y, y', y'')h'(x) + L_{y''}(x, y, y', y'')h''(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

para todo $h \in C_0^2(x_0, x_1)$.

(b) Utilice los resultados de la Parte 1 para concluir que $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} L_{y''}(x, y, y', y'')$ es continua y

$$L_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} L_{y''} = 0. \tag{2}$$

Parte 3. *Extremos libres.*

Suponga ahora que los extremos de las funciones admisibles reposan sobre las rectas verticales $x = x_0$ y $x = x_1$. Sea $y = y(x)$ un extremo de J.

(a) Pruebe que se tiene (1) para todo $h \in C^2(x_0, x_1)$ y justifique que $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} L_{y''}(x, y, y', y'')$ es continua y que y debe satisfacer la ecuación (2).

(b) Determine las condiciones de borde de (2).

Parte 4. *Casos especiales.*

(a) Pruebe que si $L = L(x, y', y'')$, entonces (2) se reduce a

$$L_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y''} = C.$$

(b) Pruebe que si $L = L(y, y', y'')$, entonces (2) se reduce a

$$L - y'\Big(L_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y''}\Big) - y'' L_{y''} = C.$$

Hint: Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L$ y multiplique (2) por y'.

Problema 4. Sea el funcional

$$J(y) = \int_0^1 \left(1 + (y'')^2\right) \mathrm{d}x..$$

Encuentre los extremales de J correspondientes a los siguientes casos:

(a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.
(b) $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
(c) $y'(0) = 1$, $y'(1) = -1$.
(d) $y(0) = 0$, $y'(1) = -1$.

Problema 5. Considere el funcional a extremos fijos

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') \,\mathrm{d}x,\; y(x_0) = y_0,\; y(x_1) = y_1.$$

(a) Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a J si los extremales deben coincidir en algún punto con una curva dada $\varphi = \varphi(x)$.
Hint: Utilice la variación general de un funcional aplicado a ambos lados del punto de contacto con φ.
(b) Encuentre un extremo del funcional

$$J(y) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y')^2} \,\mathrm{d}x,\; y(-1) = 0,\; y(1) = 0,$$

de forma que intersecte en algún punto a la parábola $\varphi(x) = x^2 + 1$.

Problema 6. Determine las ecuaciones de Euler-Lagrange canónicas del funcional

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + (y')^2} \,\mathrm{d}x$$

y utilícelas para encontrar la ecuación de la curva extremal.