Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016-01

Profesor: Nicolás Carreño
Ayudante: Andrés Sandoval
Martes 5 de Julio, 2016

PAUTA CERTAMEN 2
MAT-276: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Pregunta 1.(*30 pts.*) Considere la ecuación para la corriente $i(t)$ de un circuito RLC

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t), \quad i(0) = i_0, \quad L \neq 0,$$

donde $v(t)$ es el voltaje de la fuente y $q(t)$ es la carga del condensador. Se sabe que

$$q(t) = \int_0^t i(s)\,\mathrm{d}s + q_0.$$

Determine si es posible controlar la corriente y la carga del condensador mediante el voltaje en cualquier tiempo $T > 0$.

Hint: Escriba la ecuación como un sistema lineal de primer orden.

Solución. Sea

$$x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ i(t) \end{pmatrix}.$$

Como $q'(t) = i(t)$, es fácil ver que la ecuación se puede escribir como

$$x' = Ax + Bv,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos la condición de Kalman. La matriz de Kalman está dada por

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ 1/L & -R/L^2 \end{bmatrix}$$

que tiene rango 2. Por lo tanto, el sistema es controlable en todo tiempo $T > 0$. $\square$

Pregunta 2.(*40 pts.*) Considere un carro que puede moverse sobre un riel mediante turbinas colocadas en sus extremos. El movimiento del *carro-cohete* está gobernado por

$$x''(t) = u(t),$$

donde el control $u(t)$ representa la fuerza de los cohetes, que supondremos está acotada: $|u(t)| \leq 1$. Dadas condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, el objetivo es determinar la estrategia de control que lleve el carro al reposo en el origen en tiempo mínimo.

Denote $v(t) = x'(t)$:

(a) (*10 pts.*) Escriba la ecuación de movimiento como un sistema lineal de primer orden para $(x(t), v(t))$ y determine la forma general del control óptimo. En particular, deduzca la cantidad máxima de cambios de signo del control.

(b) (*10 pts.*) Bosqueje las trayectorias en el espacio de fase correspondientes a los valores del control óptimo.

(c) (*10 pts.*) Describa la estrategia de tiempo mínimo en función de las condiciones iniciales x_0 y v_0. Le será útil identificar la curva de conmutación, es decir, donde el control cambia de signo y se mantiene constante.

(d) (*10 pts.*) Escriba el control óptimo en forma de *ciclo cerrado*, es decir, en función de $x(t)$ y $v(t)$.

Solución. (a) La ecuación se puede escribir como el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Para ver la forma del control óptimo, introduzcamos el vector adjunto $p(t)^{tr} = (p_1(t), p_2(t))$, solución del sistema adjunto

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

que tiene por solución

$$p_1(t) = p_1^0, \quad p_2(t) = -p_1^0 t + p_2^0,$$

con p_1^0 y p_2^0 constantes tales que $p(t) \neq 0$. Por el Principio del Máximo (caso lineal), sabemos que el control óptimo debe ser de la forma

$$u(t) = \text{signo}(p(t)^{tr} B) = \text{signo}(p_2(t)) = \text{signo}(-p_1^0 t + p_2^0),$$

pues estamos en el caso de control escalar. Deducimos entonces que el control toma los valores 1 y -1, cambiando a lo más una vez de signo.

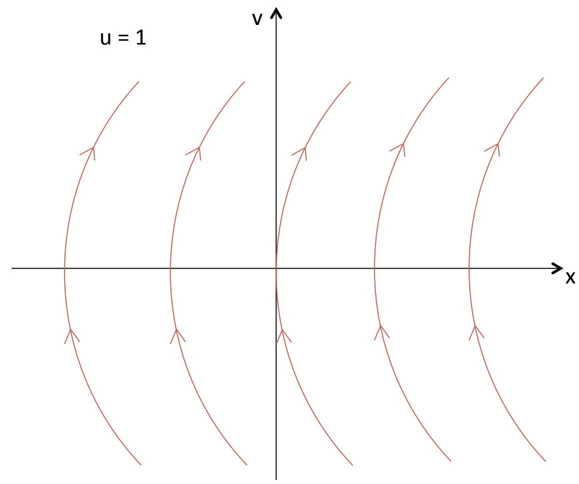
(b) • $\underline{u = 1.}$ En este caso, el sistema queda de la forma

$$x' = v, \quad v' = 1.$$

Una forma de encontrar las trayectorias en el espacio de fase es la siguiente:

$$x' = v = vv' = \frac{(v^2)'}{2},$$

$$x = \frac{v^2}{2} + C.$$

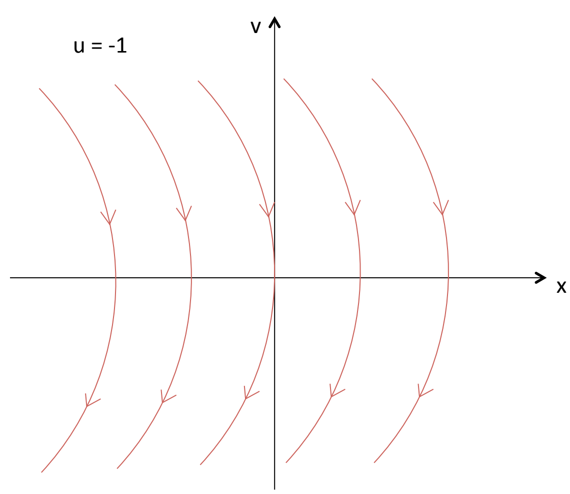


- $\underline{u = -1.}$ De igual forma, tenemos el sistema

$$x' = v, \quad v' = -1,$$

lo que nos lleva a

$$x = -\frac{v^2}{2} + C.$$



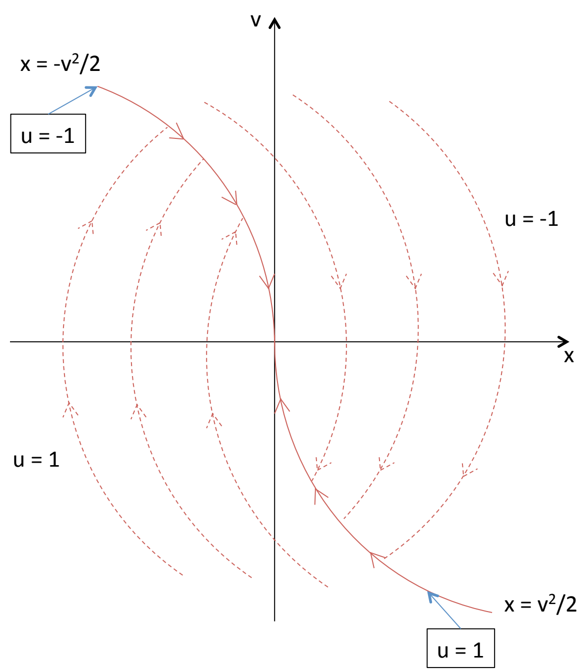
En ambos casos, las trayectorias corresponden a parábolas.

(c) La curva de conmutación está dada por

$$x = -\text{signo}(v)\frac{v^2}{2}.$$

La estrategia de control está descrita como sigue:

- Si (x_0, v_0) pertenece a esta curva, el sistema puede llevarse al origen sin cambio de signo de u. Más precisamente, si $x_0 = -\text{signo}(v_0)\frac{v_0^2}{2}$, entonces $u = -\text{signo}(v_0)$.
- Si (x_0, v_0) está sobre esta curva, u toma el valor -1 y luego cambia a 1 (cuando el sistema llega a la curva de conmutación).
- Si (x_0, v_0) está bajo esta curva, u toma el valor 1 y luego cambia a -1 (cuando el sistema llega a la curva de conmutación).



(d) El control óptimo se puede escribir en función de (x, v) como

$$u(x,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,v) = (0,0), \\ 1 & \text{si } v > 0 \text{ y } q < -\dfrac{v^2}{2}, \\ 1 & \text{si } v \leq 0 \text{ y } q \leq \dfrac{v^2}{2}, \\ -1 & \text{si } v \geq 0 \text{ y } q \geq \dfrac{v^2}{2}, \\ -1 & \text{si } v < 0 \text{ y } q > \dfrac{v^2}{2}. \end{cases}$$

$\square$

Pregunta 3.(*40 pts.*) Considere el sistema lineal en $[0,T]$ con observación:

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0,$$
$$y(t) = C(t)x(t),$$

donde $A(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R})$ y $C(t) \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R})$ son matrices acotadas en $[0,T]$. Dada una trayectoria arbitraria $\xi(t) \in \mathbb{R}^p$, se busca un control tal que la diferencia entre la observación $y(t)$ y $\xi(t)$ sea pequeña en $[0,T]$. Para esto, se propone minimizar el costo cuadrático

$$C(u) = e(T)^{tr} Q e(T) + \int_0^T \big(e(t)^{tr} W(t) e(t) + u(t)^{tr} U(t) u(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

donde $e(t) = y(t) - \xi(t)$ es el error, $Q, W(t) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ y $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ son matrices simétricas definidas positivas. Asuma que se cumple la condición de coercividad:

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m) : \int_0^T u(t)^{tr} U(t) u(t)\,\mathrm{d}t \geq \alpha \int_0^T |u(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Para encontrar una expresión para el control que minimiza $C(u)$, se propone seguir los siguientes pasos:

(a) (*10 pts.*) Defina el *vector extendido* $\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ y reformule el problema con el sistema en $\mathbb{R}^{N+1}$

$$\widetilde{x}'(t) = \widetilde{A}(t)\widetilde{x}(t) + \widetilde{B}(t)u(t), \quad \widetilde{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el costo escrito como

$$C(u) = \widetilde{x}(T)^{tr} \widetilde{Q} \widetilde{x}(T) + \int_0^T \big(\widetilde{x}(t)^{tr} \widetilde{W}(t) \widetilde{x}(t) + u(t)^{tr} U(t) u(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

donde $\widetilde{A}(t) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$, $\widetilde{B}(t) \in \mathcal{M}_{N+1,m}(\mathbb{R})$, $\widetilde{Q}, \widetilde{W}(t) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ son matrices definidas por bloques que debe determinar.

Nota: Las matrices $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{W}(t)$ deben ser simétricas y escritas en función de $C(t)$ y $\xi(t)$.

(b) (*10 pts.*) Demuestre que existe un único control que minimiza el costo y se escribe como

$$u(t) = U(t)^{-1} \widetilde{B}(t)^{tr} \widetilde{E}(t) \widetilde{x}(t),$$

donde $\widetilde{E}(t) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica. Determine la ecuación diferencial que cumple $\widetilde{E}(t)$ en función de $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$, $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{W}(t)$.

(c) (*10 pts.*) Escriba $\widetilde{E}(t)$ como

$$\widetilde{E}(t) = \begin{bmatrix} E(t) & h(t) \\ h(t)^{tr} & \alpha(t) \end{bmatrix},$$

donde $E(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $h(t) \in \mathbb{R}^N$ y $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Determine las ecuaciones diferenciales satisfechas por $E(t)$, $h(t)$ y $\alpha(t)$ y muestre que

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^{tr} E(t) x(t) + U(t)^{-1} B(t)^{tr} h(t).$$

(d) (*10 pts.*) Escriba el valor mínimo del costo en función de x, E, h y α.

Nota: Recuerde que para matrices definidas por bloques, se cumple la regla de multiplicación:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}.$$

Solución. (a) Definamos las matrices por bloques

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \widetilde{B}=\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix},\ \widetilde{Q}=\begin{bmatrix}C(T)^{tr}QC(T) & -C(T)^{tr}Q\xi(T)\\ -\xi(T)^{tr}QC(T) & \xi(T)^{tr}Q\xi(T)\end{bmatrix},\ \widetilde{W}=\begin{bmatrix}C^{tr}WC & -C^{tr}W\xi\\ -\xi^{tr}WC & \xi^{tr}W\xi\end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar (usando multiplicación por bloques) que

$$\widetilde{x}^{tr}(T)\widetilde{Q}\widetilde{x}(T)=(y(T)-\xi(T))^{tr}Q(y(T)-\xi(T))$$

y

$$\widetilde{x}^{tr}(t)\widetilde{W}(t)\widetilde{x}(t)=(y(t)-\xi(t))^{tr}W(t)(y(t)-\xi(t)).$$

Por lo tanto, ambos problemas son equivalentes.

(b) Como asumimos la hipótesis de coercividad, sabemos que por el Principio del Máximo (caso LC) existe un único control $u(t)$, solución del problema de minimizacón de la parte anterior, que se escribe bajo la forma de ciclo cerrado o feedback como

$$u(t)=U(t)^{-1}\widetilde{B}(t)^{tr}\widetilde{E}(t)\widetilde{x}(t),$$

donde $\widetilde{E}(t)$ satisface la ecuación matricial de Riccati:

$$\begin{cases}\widetilde{E}'(t)=\widetilde{W}(t)-\widetilde{A}(t)^{tr}\widetilde{E}(t)-\widetilde{E}(t)\widetilde{A}(t)-\widetilde{E}(t)\widetilde{B}(t)U(t)^{-1}\widetilde{B}(t)^{tr}\widetilde{E}(t),\\ \widetilde{E}(T)=-\widetilde{Q}.\end{cases}$$

Más aún, como $\widetilde{W}(t)$ y $\widetilde{Q}$ son simétricas, $\widetilde{E}(t)$ también lo es.

(c) Notemos que

$$\widetilde{A}^{tr}\widetilde{E}=\begin{bmatrix}A^{tr}E & A^{tr}h\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \widetilde{E}\widetilde{A}=\begin{bmatrix}EA & 0\\ h^{tr}A & 0\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{E}\widetilde{B}U^{-1}\widetilde{B}^{tr}\widetilde{E}=\begin{bmatrix}E & h\\ h^{tr} & \alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}BU^{-1}B^{tr} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}E & h\\ h^{tr} & \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}EBU^{-1}B^{tr}E & EBU^{-1}B^{tr}h\\ h^{tr}BU^{-1}B^{tr}E & h^{tr}BU^{-1}B^{tr}h\end{bmatrix}.$$

De esta forma, insertando la expresión de $\widetilde{E}$ en la ecuación, deducimos que E, h y α son soluciones, respectivamente, de

$$\begin{cases}E'(t)=C(t)^{tr}W(t)C(t)-A(t)^{tr}E(t)-E(t)A(t)-E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t),\\ E(T)=-C(T)^{tr}QC(T),\end{cases}$$

$$\begin{cases}h'(t)=-C(t)^{tr}W(t)\xi(t)-A(t)^{tr}h(t)-E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^{tr}h(t),\\ h(T)=C(T)^{tr}Q\xi(T),\end{cases}$$

y

$$\begin{cases}\alpha'(t)=\xi(t)^{tr}W(t)\xi(t)-h(t)^{tr}B(t)U(t)^{-1}B(t)^{tr}h(t),\\ \alpha(T)=-\xi(T)^{tr}Q\xi(T).\end{cases}$$

Por otro lado,

$$u(t)=\begin{bmatrix}U(t)^{-1}B(t)^{tr} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}E(t) & h(t)\\ h(t)^{tr} & \alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x(t)\\ 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t) & U(t)^{-1}B(t)^{tr}h(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x(t)\\ 1\end{pmatrix}$$

$$u(t)=U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t)x(t)+U(t)^{-1}B(t)^{tr}h(t).$$

(d) Sabemos que el costo mínimo está dado por

$$-\widetilde{x}(0)^{tr}\widetilde{E}(0)\widetilde{x}(0),$$

que usando la expresión de $\widetilde{E}$ y $\widetilde{x}$ es igual a

$$-x_0^{tr}E(0)x_0-2h(0)^{tr}x_0-\alpha(0).$$

□