Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016-01

Profesor: Nicolás Carreño
Ayudante: Andrés Sandoval
Viernes 13 de Mayo, 2016

PAUTA CERTAMEN 1
MAT-276: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Pregunta 1.(*20 pts.*) Encuentre los extremales para los siguientes funcionales:

(a) (*10 pts.*) $J(y,z) = \displaystyle\int_1^2 \left((y')^2 + (z')^2 + z^2\right) \mathrm{d}x$, sujeto a $y(1) = 1$, $z(1) = 0$, $y(2) = 2$, $z(2) = 1$.

(b) (*10 pts.*) $J(y) = \displaystyle\int_0^1 (y')^2 \,\mathrm{d}x$, sujeto a $y(0) = 0$, $y(1) = 5$, $\displaystyle\int_0^1 y \,\mathrm{d}x = 2$.

Solución. (a) Los extremales $y = y(x)$ y $z = z(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} L_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y'} = 0, & y(1) = 1,\ y(2) = 2, \\ L_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{z'} = 0, & z(1) = 0,\ z(2) = 1, \end{cases}$$

donde $L = (y')^2 + (z')^2 + z^2$. Esto es

$$\begin{cases} y'' = 0, & y(1) = 1,\ y(2) = 2, \\ z'' - z = 0, & z(1) = 0,\ z(2) = 1. \end{cases}$$

Las soluciones generales de $y'' = 0$ y $z'' - z = 0$ son

$$y(x) = Ax + B \quad \text{y} \quad z(x) = Ce^x + De^{-x},$$

respectivamente. Usando las condiciones de borde, encontramos

$$y(x) = x \quad \text{y} \quad z(x) = \frac{e^x - e^2 e^{-x}}{e^2 - 1} = \frac{e(e^{x-1} - e^{-(x-1)})}{e^2 - 1} = \frac{2e \sinh(x-1)}{e^2 - 1}.$$

(b) Como tenemos una restricción de tipo isoperimétrica, los extremales deben satisfacer la ecuación

$$L_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y'} + \lambda\Big(G_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_{y'}\Big) = 0,$$

donde $L = (y')^2$, $G = y$ y λ es una constante a determinar. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} -2y'' + \lambda &= 0 \\ y(x) &= \frac{\lambda}{4} x^2 + Ax + B. \end{aligned}$$

Usando las condiciones de borde, encontramos que

$$B = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{4} + A = 5.$$

Por otro lado,

$$\int_0^1 y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\frac{\lambda x^2}{4} + Ax\Big)\,\mathrm{d}x = 2$$
$$\frac{\lambda}{6} + A = 4.$$

Así,

$$\lambda = 12 \quad \text{y} \quad A = 2.$$

Por lo tanto

$$y(x) = 3x^2 + 2x.$$

□

Pregunta 2.(*30 pts.*) Sea $\varphi = \varphi(x)$ una curva que separa dos puntos fijos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) en el plano. Considere el funcional

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \text{ sujeto a } y(x_0) = y_0,\, y(x_1) = y_1,$$

con L dado por

$$L(x, y, y') = \begin{cases} L_1(x, y, y') & \text{si } x \in [x_0, c], \\ L_2(x, y, y') & \text{si } x \in (c, x_1], \end{cases}$$

donde $c \in (x_0, x_1)$ es el punto donde $y = y(x)$ intersecta a la curva φ (note que c es variable). Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben satisfacer los extremos de $J(y)$.

Hint: Puede usar que si $J = J_1 + J_2$, entonces $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2$, donde δJ es la variación de $J(y)$.

Solución. Sea $y = y(x)$ un extremo de $J(y)$. Escribamos $J(y)$ como

$$J(y) = J_1(y) + J_2(y),$$

donde

$$J_1(y) = \int_{x_0}^{c} L_1(x.y.y')\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad J_2(y) = \int_{c}^{x_1} L_2(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

y calculemos su variación δJ. Notemos que x_0 y x_1 están fijos, mientras que c es una variable del problema. Así, de la expresión de la variación general de un funcional, tenemos, para toda función $h \in C^1(x_0, x_1)$ tal que $h(x_0) = 0 = h(x_1)$,

$$\delta J_1 = \int_{x_0}^{c} \Big((L_1)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_1)_{y'}\Big) h\,\mathrm{d}x + \big(L_1 - y'(L_1)_{y'}\big)\big|_{x=c^-}\delta x + (L_1)_{y'}\big|_{x=c^-}\delta y$$

y

$$\delta J_2 = \int_{c}^{x_1} \Big((L_2)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_2)_{y'}\Big) h\,\mathrm{d}x - \big(L_2 - y'(L_2)_{y'}\big)\big|_{x=c^+}\delta x - (L_2)_{y'}\big|_{x=c^+}\delta y,$$

donde $(\delta x, \delta y)$ es la variación de y en el punto c. Notemos que esta variación es la misma para ambos funcionales por la continuidad de y en c.

Como la variación en c debe seguir la curva φ, tenemos (al primer orden) que $\delta y = \varphi'(c)\delta x$. Entonces,

$$\delta J_1 = \int_{x_0}^{c} \Big((L_1)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_1)_{y'}\Big) h\,\mathrm{d}x + \big(L_1 + (\varphi' - y')(L_1)_{y'}\big)\big|_{x=c^-}\delta x$$

y

$$\delta J_2 = \int_{c}^{x_1} \Big((L_2)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_2)_{y'}\Big) h\,\mathrm{d}x - \big(L_2 + (\varphi' - y')(L_2)_{y'}\big)\big|_{x=c^+}\delta x.$$

Como y es un extremo de $J(y)$, se cumple que $\delta J_1 + \delta J_2 = 0$ y, como h y δx son arbitrarios, obtenemos que y debe satisfacer

$$(L_1)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_1)_{y'} = 0 \quad \text{en } (x_0, c),$$

$$(L_2)_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_2)_{y'} = 0 \quad \text{en } (c, x_1),$$

$$\big(L_1 + (\varphi' - y')(L_1)_{y'}\big)\big|_{x=c^-} = \big(L_2 + (\varphi' - y')(L_2)_{y'}\big)\big|_{x=c^+}.$$

□

Pregunta 3.(*25 pts.*) Sea el funcional cuadrático

$$J(y) = \int_0^a \big((y')^2 - by^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

Encuentre los valores de $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ que aseguren que $J(y)$ es definido positivo para todo $y \in C^1(0,a)$ tal que $y(0) = 0$ e $y(a) = 0$.

Solución. El funcional $J(y)$ es de la forma

$$\int_0^a \big(P(y')^2 + Qy^2\big)\,\mathrm{d}x,$$

con $P \equiv 1$ y $Q \equiv -b$. Como $P > 0$, basta encontrar valores de $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que el intervalo $[0,a]$ no contiene puntos conjugados a 0.

La ecuación de Jacobi asociada a $J(y)$ es

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u'\big) - bu = 0$$

$$u'' + bu = 0. \tag{1}$$

Completemos esta ecuación con las condiciones (iniciales) $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, y veamos para qué valores de a y b la solución de (1) es tal que $u(x) > 0$, $\forall x \in (0,a]$.

• $\underline{b < 0:}$ $u(x) = Ae^{\sqrt{|b|}x} + Be^{-\sqrt{|b|}x}$. Usando las condiciones iniciales, obtenemos

$$u(x) = \frac{e^{\sqrt{|b|}x} - e^{-\sqrt{|b|}x}}{2\sqrt{|b|}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}}\sinh\big(\sqrt{|b|}x\big) > 0, \quad x > 0.$$

Deducimos que $\forall a > 0$ y $\forall b < 0$, $J(y)$ es definido positivo.

• $\underline{b = 0:}$ $u(x) = Ax + B$. es fácil entonces ver que

$$u(x) = x > 0, \quad x > 0.$$

Al igual que en el caso anterior, $\forall a > 0$ y $\forall b < 0$, $J(y)$ es definido positivo.

• $\underline{b > 0:}$ $u(x) = A\sin(\sqrt{b}x) + B\cos(\sqrt{b}x)$ y por lo tanto

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{b}x).$$

Notemos que

$$u(x) > 0,\ \forall x \in (0,a] \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\sqrt{b}x) > 0,\ \forall x \in (0,a] \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{b}a < \pi.$$

Por lo tanto, $\forall a, b > 0$ tales que $\sqrt{b}a < \pi$, $J(y)$ es definido positivo. □

Pregunta 4.(*25 pts.*) Sea el funcional

$$J(y) = 2\pi \int_{-1}^{1} y\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x, \text{ sujeto a } y(-1) = y(1),\ y > 0.$$

Se quiere encontrar $y = y(x)$ que minimice $J(y)$ usando variables canónicas. Para ello:

(a) (*10 pts.*) Encuentre el Hamiltoniano del sistema y deduzca que es constante en cada punto de una curva extremal.

(b) (*10 pts.*) Usando la parte anterior, deduzca a partir de las ecuaciones canónicas que los extremales de $J(y)$ son soluciones de

$$y'' - C^2 y = 0,$$

donde C es una constante.

(c) (*5 pts.*) Demuestre que la curva que resuelve el problema tiene la forma

$$y(x) = A\cosh(x/B),$$

donde $A, B > 0$.

Solución. (a) Calculemos las variables canónicas. Sea $L = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$.

$$p = L_{y'} = 2\pi \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Notemos que

$$y' = \frac{p}{\sqrt{4\pi^2y^2 - p^2}}$$

y

$$1 + (y')^2 = \frac{4\pi^2y^2}{4\pi^2y^2 - p^2}.$$

El Hamiltoniano está dado por

$$H = -L + py' = -\frac{4\pi^2y^2}{\sqrt{4\pi^2y^2-p^2}} + \frac{p^2}{\sqrt{4\pi^2y^2-p^2}} = -\sqrt{4\pi^2y^2 - p^2}.$$

Por otro lado, como estamos en un caso autónomo (L no depende explícitamente de x), el Hamiltoniano es constante en cada punto de una curva extremal, es decir,

$$H = -\sqrt{4\pi^2y^2 - p^2} = C.$$

(b) Las ecuaciones canónicas están dadas por

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -H_y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = H_p,$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{4\pi^2y}{\sqrt{4\pi^2y^2-p^2}} = -\frac{4\pi^2y}{C},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{\sqrt{4\pi^2y^2-p^2}} = -\frac{p}{C}.$$

Derivando esta última igualdad con respecto a x, obtenemos

$$y'' = -\frac{p'}{C} = \frac{4\pi^2}{C^2}y.$$

(c) La solución general viene dada por

$$y(x) = Ae^{|C|x} + Be^{-|C|x}.$$

Como $y(-1) = y(1)$, deducimos que $A = B$ y

$$y(x) = A(e^{|C|x} + e^{-|C|x}) = 2A\cosh(|C|x).$$

Además, como $y > 0$, entonces $A > 0$, pues $\cosh(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Tiempo: 2.5 horas.