Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016-01

Profesor: Nicolás Carreño
Ayudante: Andrés Sandoval
Martes 5 de Julio, 2016

CERTAMEN 2
MAT-276: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Pregunta 1.(*30 pts.*) Considere la ecuación para la corriente $i(t)$ de un circuito RLC

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t), \quad i(0) = i_0, \quad L \neq 0,$$

donde $v(t)$ es el voltaje de la fuente y $q(t)$ es la carga del condensador. Se sabe que

$$q(t) = \int_0^t i(s)\,\mathrm{d}s + q_0.$$

Determine si es posible controlar la corriente y la carga del condensador mediante el voltaje en cualquier tiempo $T > 0$.

Hint: Escriba la ecuación como un sistema lineal de primer orden.

Pregunta 2.(*40 pts.*) Considere un carro que puede moverse sobre un riel mediante turbinas colocadas en sus extremos. El movimiento del *carro-cohete* está gobernado por

$$x''(t) = u(t),$$

donde el control $u(t)$ representa la fuerza de los cohetes, que supondremos está acotada: $|u(t)| \leq 1$. Dadas condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, el objetivo es determinar la estrategia de control que lleve el carro al reposo en el origen en tiempo mínimo.

Denote $v(t) = x'(t)$:

(a) (*10 pts.*) Escriba la ecuación de movimiento como un sistema lineal de primer orden para $(x(t), v(t))$ y determine la forma general del control óptimo. En particular, deduzca la cantidad máxima de cambios de signo del control.

(b) (*10 pts.*) Bosqueje las trayectorias en el espacio de fase correspondientes a los valores del control óptimo.

(c) (*10 pts.*) Describa la estrategia de tiempo mínimo en función de las condiciones iniciales x_0 y v_0. Le será útil identificar la curva de conmutación, es decir, donde el control cambia de signo y se mantiene constante.

(d) (*10 pts.*) Escriba el control óptimo en forma de *ciclo cerrado*, es decir, en función de $x(t)$ y $v(t)$.

Pregunta 3.(*40 pts.*) Considere el sistema lineal en $[0, T]$ con observación:

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned}$$

donde $A(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $B(t) \in \mathcal{M}_{N,m}(\mathbb{R})$ y $C(t) \in \mathcal{M}_{p,N}(\mathbb{R})$ son matrices acotadas en $[0, T]$. Dada una trayectoria arbitraria $\xi(t) \in \mathbb{R}^p$, se busca un control tal que la diferencia entre la observación $y(t)$ y $\xi(t)$ sea pequeña en $[0, T]$. Para esto, se propone minimizar el costo cuadrático

$$C(u) = e(T)^{tr} Q e(T) + \int_0^T \left(e(t)^{tr} W(t) e(t) + u(t)^{tr} U(t) u(t) \right) \mathrm{d}t,$$

donde $e(t) = y(t) - \xi(t)$ es el error, $Q, W(t) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ y $U(t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ son matrices simétricas definidas positivas. Asuma que se cumple la condición de coercividad:

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m) : \int_0^T u(t)^{tr} U(t) u(t)\,\mathrm{d}t \geq \alpha \int_0^T |u(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Para encontrar una expresión para el control que minimiza $C(u)$, se propone seguir los siguientes pasos:

(a) (*10 pts.*) Defina el *vector extendido* $\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 \end{pmatrix}$ y reformule el problema con el sistema en $\mathbb{R}^{N+1}$

$$\widetilde{x}'(t) = \widetilde{A}(t)\widetilde{x}(t) + \widetilde{B}(t)u(t), \quad \widetilde{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el costo escrito como

$$C(u) = \widetilde{x}(T)^{tr}\widetilde{Q}\widetilde{x}(T) + \int_0^T \left(\widetilde{x}(t)^{tr}\widetilde{W}(t)\widetilde{x}(t) + u(t)^{tr}U(t)u(t)\right)\mathrm{d}t,$$

donde $\widetilde{A}(t) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$, $\widetilde{B}(t) \in \mathcal{M}_{N+1,m}(\mathbb{R})$, $\widetilde{Q}, \widetilde{W}(t) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ son matrices definidas por bloques que debe determinar.

Nota: Las matrices $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{W}(t)$ deben ser simétricas y escritas en función de $C(t)$ y $\xi(t)$.

(b) (*10 pts.*) Demuestre que existe un único control que minimiza el costo y se escribe como

$$u(t) = U(t)^{-1}\widetilde{B}(t)^{tr}\widetilde{E}(t)\widetilde{x}(t),$$

donde $\widetilde{E}(t) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica. Determine la ecuación diferencial que cumple $\widetilde{E}(t)$ en función de $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$, $\widetilde{Q}$ y $\widetilde{W}(t)$.

(c) (*10 pts.*) Escriba $\widetilde{E}(t)$ como

$$\widetilde{E}(t) = \begin{bmatrix} E(t) & h(t) \\ h(t)^{tr} & \alpha(t) \end{bmatrix},$$

donde $E(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $h(t) \in \mathbb{R}^N$ y $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Determine las ecuaciones diferenciales satisfechas por $E(t)$, $h(t)$ y $\alpha(t)$ y muestre que

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t)x(t) + U(t)^{-1}B(t)^{tr}h(t).$$

(d) (*10 pts.*) Escriba el valor mínimo del costo en función de x, E, h y α.

Nota: Recuerde que para matrices definidas por bloques, se cumple la regla de multiplicación:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{bmatrix}.$$

Tiempo: 2.5 horas.