Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Semestre 2016-01

Profesor: Nicolás Carreño
Ayudante: Andrés Sandoval
Viernes 13 de Mayo, 2016

CERTAMEN 1
MAT-276: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Pregunta 1.(*20 pts.*) Encuentre los extremales para los siguientes funcionales:

(a) (*10 pts.*) $J(y,z) = \displaystyle\int_1^2 \left((y')^2 + (z')^2 + z^2\right) \mathrm{d}x$, sujeto a $y(1) = 1$, $z(1) = 0$, $y(2) = 2$, $z(2) = 1$.

(b) (*10 pts.*) $J(y) = \displaystyle\int_0^1 (y')^2 \,\mathrm{d}x$, sujeto a $y(0) = 0$, $y(1) = 5$, $\displaystyle\int_0^1 y \,\mathrm{d}x = 2$.

Pregunta 2.(*30 pts.*) Sea $\varphi = \varphi(x)$ una curva que separa dos puntos fijos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) en el plano. Considere el funcional

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') \,\mathrm{d}x, \text{ sujeto a } y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,$$

con L dado por

$$L(x,y,y') = \begin{cases} L_1(x,y,y') & \text{si } x \in [x_0, c], \\ L_2(x,y,y') & \text{si } x \in (c, x_1], \end{cases}$$

donde $c \in (x_0, x_1)$ es el punto donde $y = y(x)$ intersecta a la curva φ (note que c es variable). Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben satisfacer los extremos de $J(y)$.

Hint: Puede usar que si $J = J_1 + J_2$, entonces $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2$, donde δJ es la variación de $J(y)$.

Pregunta 3.(*25 pts.*) Sea el funcional cuadrático

$$J(y) = \int_0^a \left((y')^2 - by^2\right) \mathrm{d}x.$$

Encuentre los valores de $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ que aseguren que $J(y)$ es definido positivo para todo $y \in C^1(0, a)$ tal que $y(0) = 0$ e $y(a) = 0$.

Pregunta 4.(*25 pts.*) Sea el funcional

$$J(y) = 2\pi \int_{-1}^{1} y\sqrt{1 + (y')^2} \,\mathrm{d}x, \text{ sujeto a } y(-1) = y(1),\ y > 0.$$

Se quiere encontrar $y = y(x)$ que minimice $J(y)$ usando variables canónicas. Para ello:

(a) (*10 pts.*) Encuentre el Hamiltoniano del sistema y deduzca que es constante en cada punto de una curva extremal.

(b) (*10 pts.*) Usando la parte anterior, deduzca a partir de las ecuaciones canónicas que los extremales de $J(y)$ son soluciones de

$$y'' - C^2 y = 0,$$

donde C es una constante.

(c) (*5 pts.*) Demuestre que la curva que resuelve el problema tiene la forma

$$y(x) = A\cosh(x/B),$$

donde $A, B > 0$.

Tiempo: 2.5 horas.