Matemática 2 MAT022

Clase 9 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Sea $\overrightarrow{p}$ un punto dado y $\overrightarrow{d}$ un vector no nulo. Definimos la recta que pasa por $\overrightarrow{p}$ y es paralela a $\overrightarrow{d}$ como el conjunto de puntos

$$L = \{\overrightarrow{p} + \lambda \overrightarrow{d} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

El vector $\overrightarrow{d}$ se llama *vector director* de la recta L.

Observación

Existen distintas formas de describir la recta L.

Ecuación paramétrica de la recta L.

Si $\overrightarrow{p} = (x_0, y_0, z_0)$ y $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$, entonces el punto (x, y, z) está en la recta L si (y solo si)

$$L: \quad \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda d_1 \\ y & = & y_0 + \lambda d_2 \\ z & = & z_0 + \lambda d_3 \end{array}$$

para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

En este caso, decimos que la recta L está escrita en *forma paramétrica* (con parámetro λ).

Ecuación simétrica de la recta L.

Si $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2, d_3)$ no tiene ninguna coordenada 0, entonces el punto (x, y, z) está en la recta L si se cumplen las igualdades:

$$L: \quad \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}.$$

Estas son conocidas como las *ecuaciones simétricas* de L.

Observación: Si, por ejemplo, $d_1 = 0$, las ecuaciones simétricas se escriben como

$$L: \quad x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}.$$

Ejemplo

Si $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son puntos distintos, la recta que pasa por ellos es:

$$L: \quad (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2), \quad t \in \mathbb{R},$$

pues $\vec{d} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

Entonces: la forma paramétrica está dada por

$$L: \quad \begin{array}{rcl} x & = & x_1 + t(x_1 - x_2) \\ y & = & y_1 + t(y_1 - y_2) \\ z & = & z_1 + t(z_1 - z_2) \end{array} \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

y la forma simétrica por

$$L: \quad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}.$$

Definición

Sean dos rectas dadas por

$$L_1 = \left\{\overrightarrow{p_1} + \lambda\overrightarrow{d_1} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \quad L_2 = \left\{\overrightarrow{p_2} + \lambda\overrightarrow{d_2} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Diremos que dos rectas son **paralelas** si sus vectores directores son paralelos, es decir, si $\vec{d_1} = \delta\vec{d_2}$ con $\delta \neq 0$.
- Diremos que dos rectas son **perpendiculares** si sus vectores directores son ortogonales, es decir, si $\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = 0$.

Definición

Un conjunto $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ es un plano si existe un vector $\overrightarrow{p}$ y dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no paralelos tales que

$$\Pi = \left\{ \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si $\overrightarrow{p} = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$\Pi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y & = & y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z & = & z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{array}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Estas son las *ecuaciones paramétricas* del plano.

Un plano Π en $\mathbb{R}^3$ se puede describir con un punto y un vector perpendicular a él (llamado vector normal). Sea $\vec{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ y el vector normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Si $\vec{q} = (x, y, z) \in \Pi$, entonces se debe cumplir

$$\begin{aligned} (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n} &= 0 \\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (n_1, n_2, n_3) &= 0 \\ xn_1 + yn_2 + zn_3 - x_0n_1 - y_0n_2 - z_0n_3 &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\Pi : \quad ax + by + cz + d = 0.$$

Esta es la *ecuación general* del plano Π. Notar que $\vec{n} = (a, b, c)$.

Proposición

Si $\Pi = \left\{ \overrightarrow{p} + \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$, *entonces se puede tomar*

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}.$$

Se tiene que

$$\Pi = \{ \overrightarrow{q} \in \mathbb{R}^3 \; / \; (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}) \cdot \overrightarrow{n} = 0 \}$$

Observación: Un plano se puede determinar conociendo 3 puntos pertenecientes a él. Sean $A, B, C \in \Pi$. Entonces

$$\vec{p} = A, \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}.$$

Por otra parte,

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

es un vector normal a Π. Se completa la ecuación general de Π con A, B o C.

De forma inversa, un plano puede ser determinado por 3 puntos *no colineales*.

Definición

- Dos planos son **paralelos** si y solo si sus vectores normales son paralelos.
- Dos planos son **perpendiculares** si y solo si sus vectores normales son ortogonales.

Teorema

Sean los planos

$$\Pi_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\Pi_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Entonces:

1. $\Pi_1 || \Pi_2$ *si y solo si* $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(*$\lambda \neq 0$*).*
2. $\Pi_1 \perp \Pi_2$ *si y solo si* $(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = 0$.
3. $\Pi_1 = \Pi_2$ *si y solo si* $(a_1, b_1, c_1, d_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2, d_2)$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(*$\lambda \neq 0$*).*

Teorema

Considerar la recta L *con vector director* $\overrightarrow{d}$ *y el plano* Π *con vector normal* $\overrightarrow{n}$. *Se tiene:*

- $L \parallel \Pi \iff \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$
- $L \perp \Pi \iff \overrightarrow{d} \parallel \overrightarrow{n}$.

Teorema (Distancia punto recta)

Consideremos la recta L que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene como vector director a $\vec{d}$. Sea $P = (x, y, z)$ un punto que no pertenece a L. La distancia de P a L está dada por:

$$\mathrm{d}(P, L) = \frac{\| \vec{d} \times \overrightarrow{P_0P} \|}{\| \vec{d} \|}.$$

Teorema (Distancia punto plano)

Dado un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *y un plano* $\Pi : ax + by + cz + d = 0$*.*
La distancia entre P_0 *y* Π *está dada por:*

$$\mathrm{d}(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Teorema (Distancia entre rectas)

Sea L_1 la recta que pasa por el punto P_1 y tiene dirección $\overrightarrow{d_1}$. Sea L_2 la recta que pasa por el punto P_2 y tiene dirección $\overrightarrow{d_2}$. La distancia mínima entre L_1 y L_2 está dada por:

$$\mathrm{d}_{\min}(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}, \quad \textit{donde} \quad \overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}.$$