Matemática 2 MAT022

Clase 8 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Dado un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, queremos determinar su *proyección ortogonal* $\vec{w}$ sobre otro vector $\vec{v} \neq 0$. Se debe cumplir:

- $\vec{w}$ es paralelo a $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \lambda \vec{v} \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- $\vec{u} - \vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$:

$$(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Se encuentra que $\lambda = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$. Denotaremos $\vec{w} = \mathrm{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$.

Definición

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Llamaremos **proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$** al vector

$$\mathrm{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right) \vec{v}.$$

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no nulos. Nos interesa buscar un tercer vector $\vec{w} = (x, y, z) \neq 0$ tal que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se debe cumplir que

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} u_1x + u_2y + u_3z &= 0, \\ v_1x + v_2y + v_3z &= 0. \end{aligned}$$

Manipulando un poco estas ecuaciones, se puede probar que una solución está dada por

$$x = u_2v_3 - u_3v_2, \quad y = u_3v_1 - u_1v_3, \quad z = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Definición

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Se define el **producto cruz** (o vectorial) $\vec{u} \times \vec{v}$ como el vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1).$$

Teorema

$\vec{u} \times \overline{v}$ *es ortogonal a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *.*

La definición de producto cruz se puede recordar y trabajar como un determinante

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$
$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k},$$

donde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Teorema

El producto cruz cumple las siguientes propiedades

1. $\left(\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^3\right)\ \vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}.$
2. $\left(\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3\right)\ \vec{u}\perp(\vec{u}\times\vec{v})$ *y* $\vec{v}\perp(\vec{u}\times\vec{v}).$
3. $\left(\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3\right)\ (\vec{u}\times\vec{v})=-(\vec{v}\times\vec{u}).$
4. $\left(\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3\right)\ (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}.$
5. $\left(\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3\right)\ \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}.$
6. $\left(\forall\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3\right)(\forall\lambda\in\mathbb{R})\ \lambda(\vec{u}\times\vec{v})=(\lambda\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\lambda\vec{v}).$
7. $\left(\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3\right)\ \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}.$

Teorema (Identidad de Lagrange)

Para todo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ se cumple la identidad

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

Demostración: ¡Ejercicio!

Si $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces

$$\begin{aligned} (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta)^2 + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) + \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

de donde obtenemos la identidad

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta.$$

Observación: La norma $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ es el área del paralelógramo de aristas $\vec{u}$ y $\vec{v}$.