Matemática 2 MAT022

Clase 7 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Nos interesa definir el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Pero antes, miremos dos ejemplos importantes.

Ejemplo ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$)

- El conjunto $\mathbb{R}^2$ (el plano) es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- El conjunto $\mathbb{R}^3$ (el espacio tridimensional) es el conjunto de todas las tripletas ordenadas de números reales:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para generalizar $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ a dimensiones superiores, definamos el concepto de lista:

Definición

Sea n un entero positivo. Una **lista de largo** n (o n**-tupla**) es una colección ordenada de n elementos que luce como

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Decimos que dos listas son iguales si y solo si tienen el mismo largo y los mismos elementos en el mismo orden.

Definición

El espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las listas de largo n de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } j = 1, \ldots, n\}.$$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son llamados también **vectores** y los denotamos como $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, donde decimos que v_i es la i-ésima coordenada de $\vec{v}$.

Ejemplo

- $\vec{u} = (3, 1, 0, -2)$ es un vector de $\mathbb{R}^4$.
- $\vec{v} = (3, -4, 1, -6, 3, 0)$ es un vector de $\mathbb{R}^6$.

Definición

Sean $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sobre el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ se definen las siguientes operaciones:

1. **Igualdad de vectores:**
$$\vec{v} = \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad v_i = w_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

2. **Suma de vectores:**
$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n).$$

3. **Producto por escalar:**
$$\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n).$$

La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ posee las siguientes propiedades:

Propiedades

1. **Clausura:** $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \vec{v} + \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
2. **Conmutatividad:** $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
3. **Asociatividad:** $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$.
4. **Existencia de neutro aditivo:** considere: $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Se cumple que: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.
5. **Existencia de inversos aditivos:** para $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, considerar $(-\vec{v}) = (-v_1, \ldots, -v_n) \in \mathbb{R}^n$. Se cumple: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = 0$.

El producto por escalar posee las siguientes propiedades:

Propiedades

1. $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \vec{v} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \alpha \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
5. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Definición

Sean $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define el **producto punto** o **producto interno** entre (los vectores) $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i .$$

1. El producto punto también se puede denotar con el símbolo: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.
2. El producto punto es una función de *dos variables*:

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

El producto punto posee las siguientes propiedades:

Propiedades

Sean $\vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{u}$ en $\mathbb{R}^n$ y α, β escalares. Entonces:

1. **Definido positivo:** $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$.
2. **Simetría:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
3. **Distributividad:** $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$.
4. $(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha (\vec{v} \cdot \vec{w})$.
5. **Bilinealidad:**
$$(\alpha \vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \alpha (\vec{v} \cdot \vec{u}) + \vec{w} \cdot \vec{u}.$$
$$\vec{v} \cdot (\beta \vec{w} + \vec{u}) = \beta (\vec{v} \cdot \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Definición

Sea $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define la **norma** de $\vec{v}$ como el número real:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{1/2}.$$

La norma de $\vec{v}$ mide la magnitud del vector $\vec{v}$ o la distancia entre el punto que representa y el origen.
La distancia entre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es definida por

$$\mathrm{d}(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$

La norma posee las siguientes propiedades:

Propiedades

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$; $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$.
2. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$.
3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (Desigualdad triangular).
4. $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** nos permitirá introducir la noción de ángulo recto (ortogonalidad) sobre el espacio $\mathbb{R}^n$.

Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ no nulos, entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que:

$$-\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \leq \langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle \leq \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$$

y luego $-1 \leq \dfrac{\langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \leq 1$. Por tanto, existe un único $\theta \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v},\, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}.$$

Definición

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Se define el **ángulo entre los vectores** $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como el único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \cos \theta.$$

Se denota tal ángulo por $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ o $\angle \vec{v}, \vec{w}$.

Notemos que

$$\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|}\right).$$

Definición

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que:

1. $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **ortogonales** o **perpendiculares** si: $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \pi/2$.
   Se anota: $\vec{v} \perp \vec{w}$.
2. $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **paralelos** si: $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ó $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \pi$.
   Se anota: $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

Observación

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

1. $\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
2. $\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{w}$.

Teorema (Pitágoras sobre $\mathbb{R}^n$)

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\vec{v} \perp \vec{w}$, entonces:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.$$

Basta desarrollar el término $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} \\ &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w}). \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que:

$$\left|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\right| \leq \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2\right).$$

Ejercicio (Identidad del Paralelógramo)

Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2).$$

Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, ¿puede dar una interpretación geométrica de esta igualdad?

Ejercicio

Suponga que P y Q son los puntos que corresponden al diámetro de una circunferencia de radio r con centro en C. Suponga, además, que R es un punto exterior a la circunferencia ubicado en la extensión del trazo $\overline{PQ}$. Demuestre que:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{CR}\|^2 - r^2.$$