Matemática 2 MAT022

Clase 6 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Sea A la matriz de orden 2×2 con coeficientes en $\mathbb{K}$ siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Anteriormente, para la matriz A se definió el **determinante** como el número:

$$\det A = ad - bc.$$

Respecto al número anterior tenemos el siguiente teorema:

Teorema

Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Entonces:

$$A \text{ es invertible} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

La idea es extender el resultado anterior a matrices de orden n.

Requerimos las siguientes definiciones:

Definición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$:

1. *Lamaremos **menor de orden** ij **de** A al determinante, de orden $n-1$, de la matriz que se obtiene al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz A. Lo denotaremos por el símbolo M_{ij}, o bien por el símbolo $|A_{ij}|$.*
2. *Llamaremos **cofactor de orden** ij **de** A, denotado por el símbolo C_{ij}, al número:*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|.$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule todos los cofactores de A.

Definición

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se define el ***determinante de*** A *como el número:*

$$\det A = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}, & 1 \leq j \leq n \quad (j \text{ fijo}), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}, & 1 \leq i \leq n \quad (i \text{ fijo}). \end{cases}$$

También anotamos $\det A = |A|$.

1. La definición anterior indica que el desarrollo del determinante de una matriz A puede realizarse por cualquier fila o cualquier columna.
2. Note que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|.$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule el determinante de A.

Comenzamos con un resultado básico, pero importante:

Teorema

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *una matriz triangular, entonces:*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

El determinante puede ser visto como la función:

$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

definida por $A \mapsto |A|$, cuya propiedad fundamental es:

Teorema

Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$*, entonces:*

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

Respecto de las matrices elementales y el determinante, tenemos lo siguiente:

1. $\det E_{ij} = -1$.
2. $\det E_{ij}(\alpha) = 1$, con $\alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\det E_i(r) = r$, con $r \neq 0$.

Recordemos que si A es invertible, entonces A^{-1} es un producto finito de matrices elementales de fila. Por tanto:

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

$$A \text{ es invertible} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

Ejemplo

Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que A sea invertible, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Además:

Propiedades

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Entonces:*

1. $|I_n| = 1$.
2. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.
3. $\left|A^T\right| = |A|$.
4. *Si, además,* A *es invertible, tenemos que* $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

Supongamos que $E_1, E_2, \ldots, E_r$ es una sucesión de OEF que transforman A en una matriz triangular superior, i.e.

$$A \xrightarrow{E_1} A_2 \xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_r} T,$$

o bien:

$$E_r \ldots E_2 E_1 A = T.$$

Luego, aplicando el determinante a ambos lados, tenemos:

$$\left|E_r \ldots E_2 E_1 A\right| = |T|.$$

Como $\left|E_r \ldots E_2 E_1 A\right| = \left|E_r\right| \cdot \cdots \cdot \left|E_2\right| \cdot \left|E_1\right| \cdot \left|A\right|$, obtenemos:

$$\left|A\right| = \frac{|T|}{\left|E_r\right| \cdot \cdots \cdot \left|E_2\right| \cdot \left|E_1\right|}.$$

Definición

*Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se define la matriz **adjunta** de A, denotada por $\text{adj}(A)$, a la matriz:*

$$\text{adj}(A) = (C_{ij})^T,$$

donde C_{ij} son los $\textit{cofactores}$ de A para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Calcule $\text{adj}(A)$ y $A \cdot \text{adj}(A)$.

La matriz adjunta de una matriz A es la traspuesta de la matriz formada por los cofactores de A.

Un resultado importante que relaciona la matriz A con su adjunta es:

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = |A| \cdot I_n.$$

Además:

Propiedades

Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

1. $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B) \cdot \mathrm{adj}(A)$.
2. *Si A es invertible, tenemos que:* $\big|\mathrm{adj}(A)\big| = |A|^{n-1}$.
3. *Si A es invertible, se cumple que:* $\mathrm{adj}\big(\mathrm{adj}(A)\big) = \det(A)^{n-2}A$, *para cualquier natural $n \geq 2$.*

Ejemplo

Suponga A y B son matrices en $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tales que $\det A = 2$ y que B es antisimétrica. Se definen las matrices X e Y de orden 3 por:

$$X = \operatorname{adj}\left(A^T\right) \cdot \left[A \cdot (2A)^{-1}\right]^{-1} \quad ; \qquad Y = B^2 \cdot X,$$

respectivamente.

1. Calcule $\det X$.
2. Calcule $\det Y$.
3. ¿Es Y equivalente por filas con la matriz X?

Considerar el sistema de ecuaciones lineales de orden $n \times n$ siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Sabemos que el sistema anterior se representa matricialmente como:

$$AX = B,$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si $|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución dada por: $X = A^{-1}B$.

Usando la identidad $A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A)$, tenemos el siguiente teorema:

Teorema (Regla de Cramer)

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y B una matriz columna de orden n. Suponga que $|A| \neq 0$. Entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene solución (única) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dada por:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \quad \ldots \quad , \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz de orden $n \times n$, obtenida a partir de A reemplazando su i-ésima columna por la matriz columna B.