Matemática 2 MAT022

Clase 5 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

1 Inversa de una matriz
- Definición y Propiedades
- Operaciones Elementales de Fila e invertibilidad
- El método de Gauss-Jordan para hallar inversas

Definición

*Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diremos que A es **invertible**, o bien que A es **no singular**, si existe una matriz cuadrada B tal que:*

$$\boxed{AB = BA = I_n}$$

En tal caso, anotaremos $B = A^{-1}$.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible. Su inversa es la matriz $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa si existe es única.

Ejemplo

Las siguientes matrices no son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema

Sean A y B matrices en $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibles, entonces AB es invertible. Además, se tiene que:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

La invertibilidad de matrices posee las siguientes propiedades:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.
3. $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$ para todo $\alpha \neq 0$.
4. $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$ para cualquier número entero no negativo n.

Teorema

Las matrices elementales de fila son invertibles.

Además:

1. $\big(E_{ij}\big)^{-1} = E_{ij}$.
2. $\big(E_i(r)\big)^{-1} = E_i(1/r), \quad r \neq 0$.
3. $(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k), \quad k \in \mathbb{K}$.

Teorema

Sean A y B en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrices cualesquiera. Entonces, $A \xrightarrow{F} B$, si y solo si, existe una matriz invertible $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $P \cdot A = B$.

El teorema anterior tiene una importante consecuencia:

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. *A es invertible.*
2. *A^{-1} es un producto (finito) de matrices elementales.*
3. $\rho(A) = n$.
4. $A \xrightarrow{F} I_n$.
5. $E_A = I_n$.

El teorema anterior nos da un método para hallar la inversa de una matriz.

Teorema (Gauss-Jordan)

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *invertible, entonces:*

$$(A|I_n) \xrightarrow{E_1} (A_1|E_1) \xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_r} (I_n|A^{-1}),$$

donde E_i*, con* $i = 1, 2, \ldots, r$*, son las OEF que transforman* A *en su escalonada reducida por filas.*

Note que:

$$\big(E_r \cdot E_{r-1} \cdots E_2 \cdot E_1\big) \cdot A = I_n.$$

Entonces:

$$A^{-1} = E_r \cdot E_{r-1} \cdots E_2 \cdot E_1.$$

Ejemplo

Hallar la inversa, si acaso existe, de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$