Matemática 2 MAT022

Clase 4 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Consideremos el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Usando matrices, el sistema σ se puede escribir como $AX = B$, en donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Son sistemas de ecuaciones sobre $\mathbb{R}$ las siguientes expresiones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 1 \\ x + y + z & = & 2 \\ x + 2y - z & = & 3 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

¿De qué orden son los sistemas anteriores?

Definición

Considere un sistema $\sigma : AX = B$, con $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Una matriz $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ se dice ***solución*** *del sistema σ si:*

$$\boxed{AX_0 = B}$$

Ejemplo

Verifique que la solución general del siguiente sistema 3×4 sobre $\mathbb{R}$:

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ z + 3w & = & 0 \\ -2x + 2y - 3z - 9w & = & 0 \end{array} \right.$$

es el conjunto:

$$S = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : y, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observe que la solución depende de dos parámetros ¿Cuál es la relación entre estos parámetros y la matriz escalonada reducida por filas asociada a la matriz de coeficientes de σ?

Definición

*Un sistema se llama **compatible** si tiene al menos una solución. Si el sistema no tiene solución, diremos que es **incompatible**.*

Ejemplo

¿Es compatible el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}$? Justifique.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ -x+y-z & = & 1 \\ x+y+2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Definición

*Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. El sistema $AX = 0$ se llama **homogéneo**.*

Teorema

1. *Todo sistema homogéneo es compatible.*
2. *Si A y B son matrices equivalentes por fila, entonces $AX = 0$ y $BX = 0$ tienen las mismas soluciones.*

Definición

Sea $\sigma : AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales de orden $m \times n$. Se define la ***matriz ampliada asociada al sistema*** *σ como la matriz $(A|B)$ de orden $m \times (n+1)$ que se obtiene al agregar la columna B como última columna de la matriz A.*

Para resolver un sistema de ecuaciones $\sigma : AX = B$ utilizamos OEF sobre la matriz ampliada $(A|B)$.

Ejemplo

Hallar la matriz ampliada del sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 1 \\ -x + y - z & = & 1 \\ x + y + 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Definición

Sean σ_1 y σ_2 dos sistemas de ecuaciones de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Diremos que σ_1 es ***equivalente*** *con σ_2 si tienen $exactamente$ las mismas soluciones. Anotamos $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$.*

Teorema (Gauss – Jordan)

Sea $\sigma_1 : AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales de $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & \Longleftrightarrow & \sigma_2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ AX = B & & E_A \cdot X = B^* \\ \downarrow & & \uparrow \\ (A|B) & \xrightarrow{F} & (E_A|B^*) \end{array}$$

en donde B^* es la matriz equivalentes por filas con B que se obtiene al aplicarle todas las OEF que transforman A en E_A.

1. En el diagrama anterior, los sistemas σ_1 y σ_2 son equivalentes.
2. El diagrama anterior se conoce como *proceso de Gauss-Jordan* para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo

Resuelva, de ser posible, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$:

1. *El sistema $AX = B$ es compatible si y solo si $\rho(A) = \rho(A, B)$.*
2. *Sea $AX = B$ un sistema compatible.*
    1. *Si $\rho(A) = \rho(A, B) = n$ (número de incógnitas), entonces el sistema tiene solución única.*
    2. *Si $\rho(A) = \rho(A, B) < n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*

Ejemplo

¿Tiene infinitas soluciones el sistema σ?

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{rcr} x - y + z & = & 1 \\ -x + y - z & = & -1 \\ x + y + 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Ejemplo

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere el sistema de ecuaciones lineales de 4×4 siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + (3-a)x_4 = a \\ x_1 + x_3 + (a+5)x_4 = b \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2a + 4 \end{cases}$$

Entonces, hallar los valores de a y b tales que:

1. El sistema no tenga solución.
2. El sistema tenga infinitas soluciones. Calcule, además, el conjunto solución.
3. El sistema tenga solución única. Determine dicha solución para el caso $a = b = 1$.