Matemática 2 MAT022

Clase 3 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $r, k \in \mathbb{K}$ con $r \neq 0$. Se definen las siguientes operaciones sobre las filas de A:

1. E_{ij}: *intercambio o permutación de la fila $f_i(A)$ por la fila $f_j(A)$ de la matriz A.*
2. $E_i(r)$: *reemplazo de la fila $f_i(A)$ por r veces la fila $f_i(A)$ de la matriz A.*
3. $E_{ij}(k)$: *reemplazo de la fila $f_i(A)$ por la suma de fila $f_i(A)$ más k veces la fila $f_j(A)$.*

Las tres operaciones sobre las filas de A se llaman ***operaciones elementales de fila****.*

La aplicación de una OEF sobre una matriz, se expresa mediante el símbolo $A \xrightarrow{E} A_1$.

Ejemplo

Ejemplo de OEF del tipo 1:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A_1.$$

La aplicación de la OEF E_{13} indica que sobre A se han intercambiado las filas 1 y 3.

Ejemplo

Ejemplo de OEF del tipo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3(4)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} = A_1.$$

Además, si en A_1 amplificamos la primera fila por (-2), obtenemos:

$$A_1 \xrightarrow{E_1(-2)} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 4 & -5 & -2 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} = A_2.$$

Ejemplo

Ejemplo de OEF del tipo 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = A_1.$$

Definición

*Una **matriz elemental** es una matriz que resulta al efectuar una operación elemental sobre la matriz identidad I_n.*

Tenemos tres tipos de matrices elementales.

Anotaremos por:

- E_{ij} a la matriz elemental obtenida como: $I_n \xrightarrow{E_{ij}} E_{ij}$.
- $E_i(\alpha)$ a la matriz elemental obtenida como: $I_n \xrightarrow{E_i(\alpha)} E_i(\alpha)$, con $\alpha \neq 0$.
- $E_{ij}(k)$ a la matriz elemental obtenida como: $I_n \xrightarrow{E_{ij}(k)} E_{ij}(k)$, con k cualquier escalar.

Ejemplo

Para la matriz $I_4 \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, *tenemos:*

1. $$E_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $$E_3(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $$E_{31}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición

*Diremos que las matrices A y B son **equivalentes por filas** si existe una $\textit{sucesión finita}$ de OEF: $E_1, E_2, \ldots, E_r$ tales que:*

$$A \xrightarrow{E_1} A_1 \xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_{r-1}} A_{r-1} \xrightarrow{E_r} B.$$

Anotaremos la equivalencia por filas entre A y B mediante el símbolo $A \xrightarrow{F} B$, o bien, mediante $A \sim B$.

Observación

Sean A, B y C matrices en $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se cumple:

- $A \xrightarrow{F} A$.
- *Si* $A \xrightarrow{F} B$, *entonces* $B \xrightarrow{F} A$.
- *Si* $A \xrightarrow{F} B$ *y* $B \xrightarrow{F} C$, *entonces* $A \xrightarrow{F} C$.

Ejemplo

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matrices de orden 3. ¿Es A equivalentes por filas con B?

Definición

*Una matriz se encuentra en **forma escalonada por filas** si satisface las siguientes propiedades:*

- *Cualquier fila que se componga enteramente de ceros se ubica en la parte inferior de la matriz.*
- *En cada fila distinta de cero, la primera entrada no nula o coeficiente no nulo (contado desde la izquierda), denominado **pivote**, se localiza en una columna a la izquierda de cualquier entrada no nula debajo de ella.*

Si además se cumple que:

- *sus pivotes son todos iguales a 1; y*
- *en cada fila el pivote es el único elemento no nulo de su columna,*

*decimos que la matriz se encuentra en la forma **escalonada reducida por filas** (ERF). Se anota E_A.*

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *una matriz cualquiera, entonces:*

1. *La matriz ERF de* A, E_A, *es única.*
2. $A \xrightarrow{F} E_A$.

Ejemplo

Son matrices escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

Las siguientes matrices son ERF:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{58}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{16} & \frac{31}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición

*Sea A una matriz. Se denomina **rango de la matriz** A al número de filas no nulas de la matriz ERF, equivalente por filas, con dicha matriz. Se denota el rango de la matriz A como $\rho(A)$, o bien $\mathrm{Rg}(A)$.*

Es decir:

$$\rho(A) =: n^\circ \text{ de filas no nulas de } E_A.$$

Ejemplo

Note que $\rho(I_n) = n$ y que $\rho(0) = 0$.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente por fila con la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto decimos que $\rho(A) = 2$.

Observación

Si $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, *entonces* $\rho(A) \leq \min\{n, m\}$.