Matemática 2 MAT022

Clase 2 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Tabla de contenidos

Definición

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se define la matriz* ***traspuesta de*** A, *en símbolos* A^T, *como la matriz de orden* $m \times n$ *definida por:*

$$A^T = \big(a_{ji}\big).$$

Ejemplo

Considere la matriz $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Proposición

Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Entonces:*

1. $\left(A^T\right)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha\left(A^T\right)$.
4. $(A^r)^T = \left(A^T\right)^r \quad (r \in \mathbb{N})$.

Además:

Proposición

Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, *entonces:*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Definición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diremos que:

1. *A es una matriz **simétrica** si $A^T = A$.*
2. *A es una matriz **antisimétrica** si $A^T = -A$.*

Proposición

Sean A y B matrices simétricas del mismo orden, entonces:

1. *$A + B$ es simétrica.*
2. *αA es simétrica para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Proposición

Si A es una matriz cuadrada, entonces:

1. $A + A^T$ *es simétrica.*
2. AA^T *y* $A^T A$ *son matrices simétricas.*
3. $A - A^T$ *es antisimétrica.*

Proposición

Toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. En efecto, note que:

$$\boxed{A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\textit{simétrica}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\textit{antisimétrica}}}$$

Definición

*Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diremos que A es una matriz **invertible** si existe una matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que:*

$$\boxed{AB = BA = I_n}$$

*La matriz B se conoce como la matriz **inversa** de A. En símbolos, anotamos $B = A^{-1}$.*

Ejemplo

1. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ no es invertible.
2. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ no es invertible.

La matriz inversa de una matriz invertible es única.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible. Además $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$.

Para matrices invertibles o no singulares se cumple:

Proposición

Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrices invertibles. Entonces:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.
4. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ *para todo* $\alpha \neq 0$.
5. $(A^{n})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$ *para todo entero no negativo* n.

Para el caso 2×2, tenemos:

Teorema

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$*. Entonces:*

$$\boxed{A \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad ad - bc \neq 0}$$

Definición

El número $ad - bc$ *(en* $\mathbb{K}$*) se llama el* ***determinante*** *de la matriz* A *y se anota por* $\det A = ad - bc$*.*

Teorema

Sean $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$*. Entonces:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$