Matemática 2 MAT022

Clase 23 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

1. Polinomios de Taylor
2. Series de Taylor

Definición

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n-veces derivable en $x_0 \in I$. Se define el **polinomio de Taylor de** f alrededor de x_0 (de orden n) como:

$$P_n^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Observación: Notar que

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = e^x$. El polinomio de Taylor alrededor de 0 de orden 5 está dado por:

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

2. Sea $f(x) = \ln(1 + x)$. Encontrar el k-ésimo término del polinomio de Taylor alrededor de 0.

Definición

Se llama n-ésimo resto de f en x_0 a la función

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Teorema

Sean $n \in \mathbb{N}$ *y* $x_0 \in I$*. Si* $f^{(n+1)}(x)$ *existe en* I*, entonces para cada* $x \in I$ *existe* $\bar{x} \in (x_0, x)$ *tal que*

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

con

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Ejemplo

Aproximar el número e con un error menor a $0,001$.
Sea $f(x) = e^x$. Queremos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|r_n(1)| = |f(1) - P_n(1)| \leq 0,001,$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de $f(x)$ alrededor de 0.
Por el resultado anterior, existe un $\bar{x} \in (0,1)$ tal que

$$|r_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \right| \leq \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \leq \frac{4}{(n+1)!}.$$

Basta tomar $n \geq 6$.

Definición

Se llama **serie de Taylor** de f en x_0 a la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Observación: Notar que para que la definición anterior tenga sentido se necesita que $f(x)$ tiene derivadas de todo orden en x_0.

Para asegurar la convergencia de la serie de Taylor, tenemos el siguiente resultado:

Teorema

Si existe $M > 0$ *tal que* $|f^{(n)}(x)| \leq M$ *para todo* $x \in I$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces la serie de Taylor de* f *en* x_0 *converge a* $f(x)$ *para cada* $x \in I$*, es decir,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in I.$$

Ejemplos

1. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$