Matemática 2 MAT022

Clase 22 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Sea (C_k) una sucesión y $x_0 \in \mathbb{R}$. Una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k (x - x_0)^k$$

es llamada **serie de potencias** (centrada en x_0). Los términos C_k son llamados **coeficientes** de la serie de potencias.

Ejemplos

Algunas series de potencias:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^k}{2^k}.$$

¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ converge?

Ejemplo: La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ converge si $|x| < 1$ ($x \in (-1,1)$) y diverge si $|x| \geq 1$. Además,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

- Si $|x| < 1$, entonces $(-x) \in (-1,1)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1,1).$$

- Si $|x| < 1$, entonces $x^2 \in (-1,1)$ y $(-x^2) \in (-1,1)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Para simplificar, consideremos $x_0 = 0$.

Teorema

Sea una serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$. *Se tiene:*

1. *Si converge en* $x = a$, $a \neq 0$, *entonces converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x| < |a|$.
2. *Si diverge en* $x = b$, *entonces diverge para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x| > |b|$.

Teorema

Para una serie de potencias de la forma $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$ *se cumple una y sólo una de las siguientes propiedades:*

1. $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$ *converge sólo para* $x = 0$.
2. $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$ *converge para todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existe* $R > 0$ *tal que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < R : \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k \text{ converge abs.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| > R : \sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k \text{ diverge.}$$

Definición (Radio de convergencia)

Al número R del resultado anterior se le llama **radio de convergencia**. Por convención:

1. Si $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$ converge sólo para $x = 0$, se anota $R = 0$.
2. Si $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$, se anota $R = +\infty$ ("radio de convergencia infinito").

Teorema

Para una serie de potencias de la forma $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ *se cumple una y sólo una de las siguiente propiedades:*

1. $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ *converge sólo para* $x = x_0$.
2. $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ *converge para todo* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Existe* $R > 0$ *(radio de convergencia) tal que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-x_0| < R : \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k \text{ converge abs.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-x_0| > R : \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k \text{ diverge.}$$

Definición

El conjunto en el cual la serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ converge es un intervalo y se le llama **intervalo de convergencia**. Notemos que sólo puede tener las siguientes formas:

$$\{x_0\}, \mathbb{R}, (x_0-R, x_0+R), [x_0-R, x_0+R), (x_0-R, x_0+R], [x_0-R, x_0+R].$$

Observación: Los extremos extremos del intervalo deben estudiarse de forma individual.

Ejemplos

Encontrar el intervalo de convergencia de las series:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^k x^k}{k3^k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^k x^k$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$.
6. $\displaystyle\sum \frac{(x-3)^{2k}}{k^2 5^k}$.

Supongamos que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ tiene radio de convergencia $R>0$. Entonces, se puede definir una función $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ como

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k.$$

Preguntas:

- ¿Es f continua?
- ¿Es f derivable?
- ¿Es f integrable?

Teorema (Derivación de series de potencias)

Si $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (x - x_0)^k$ *tiene radio de convergencia* $R > 0$*, entonces la serie de potencias* $\sum_{k=1}^{+\infty} k C_k (x - x_0)^{k-1}$ *tiene el mismo radio de convergencia. Además, para todo* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*:*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k C_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Observación: Del resultado anterior deducimos que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k(x-x_0)^k$ es derivable en $(x_0 - R, x_0 + R)$ (y continua).
Más aún, $f(x)$ es infinitamente derivable y se tiene que

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Se prueba que tiene radio de convergencia infinito y que $f(x) = e^x$.

Teorema (Integración de series de potencias)

Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_k (x - x_0)^k$ *tiene radio de convergencia* $R > 0$*, entonces la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$ *tiene el mismo radio de convergencia. Además, para todo* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*:*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}.$$

Ejemplos

1. Se tiene que $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k = \dfrac{1}{1+x}, \quad x \in (-1,1)$. Integrando:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x), \quad x \in (-1,1).$$

2. Se tiene que $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-1,1)$. Integrando:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arc\,tg}(x), \quad x \in (-1,1).$$

Ejercicios

1. Expresar $\dfrac{1}{1-x}$ en serie de potencias centrada en 2.
2. Expresar $\dfrac{2x}{x^2+1}$ en serie de potencias centrada en 0.
3. Expresar $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$ en serie de potencias centrada en 0.