Matemática 2 MAT022

Clase 21 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Una serie se dice **alternante** si tiene la forma $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ (o $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$) con $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, si sus términos alternan entre positivo y negativo.

Ejemplos

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$.

Teorema (Criterio de Leibnitz)

Sea (a_k) *una sucesión de términos positivos decreciente tal que* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. *Entonces la serie alternante* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *converge.*

Ejemplos

Justificar la convergencia de las series:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{k(k+2)}.$$
3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}.$$

Definición

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, pero $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, se dice **condicionalmente convergente**

Ejemplo

1. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ es absolutamente convergente.
2. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es condicionalmente convergente.

Teorema

Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente. Es decir, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge.*

Ejemplos

Estudiar la convergencia absoluta o condicional de las series:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \ln k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^2 3^k}$.

¿Por qué es importante la convergencia absoluta?

Podemos probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ (que es condicionalmente convergente). Mediante un reordenamiento de los términos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

Teorema

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces su valor es invariante bajo reordenamientos de sus términos.