

# Matemática 2 MAT022

## Clase 20 (Complementos)

Departamento de Matemática  
Universidad Técnica Federico Santa María

# Tabla de Contenidos

- 1 Criterios de convergencia de series (Parte 2)
  - Criterio del cociente o de D'Alembert
  - Criterio de la raíz o de Cauchy

## Teorema

Sea  $(x_k)$  una sucesión de números reales no nulos tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = r.$$

Se tiene que:

- 1 Si  $0 \leq r < 1$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  convergen.
- 2 Si  $r > 1$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  divergen.
- 3 Si  $r = 1$ , entonces el criterio no entrega información.

**Observación:** Si  $r = 1$ , la serie en cuestión puede converger o diverger. En efecto, considerar las series  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ .

## Ejemplos

Estudiar la convergencia de las series:

$$1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}.$$

$$2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^{25}}{3^{k+1}}.$$

$$3 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

$$4 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k}.$$

## Teorema

Sea  $(x_k)$  una sucesión de números reales tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} = r.$$

Se tiene que:

- 1 Si  $0 \leq r < 1$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  convergen.
- 2 Si  $r > 1$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  divergen.
- 3 Si  $r = 1$ , entonces el criterio no entrega información.

## Ejemplos

Estudiar la convergencia de las series:

$$1 \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}.$$

$$2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{2k+1} \right)^k.$$

$$3 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\ln k}{1000} \right)^k.$$