Matemática 2 MAT022

Clase 1 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Tabla de Contenidos

Definición

Una matriz de orden $m \times n$ (se lee m filas por n columnas) es un arreglo de m filas y n columnas, de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Cada uno de los elementos del arreglo a_{ij} es llamada $\mathit{entrada}$, $\mathit{elemento}$ o $\mathit{coeficiente}$ de la matriz.

Observación

Anotamos $A = (a_{ij})_{m\times n}$ para indicar una matriz A de m filas y n columnas.

Observación

Los elementos de una matriz pueden pertenecer a cualquier conjunto numérico, en particular a $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*. Denotaremos por* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *ó* $M(m\times n,\mathbb{R})$ *al conjunto de todas las matrices de orden* $m\times n$ *con coeficientes reales, esto es:*

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{ij})_{m\times n} : a_{ij} \in \mathbb{R},\ \forall i,j\right\}.$$

De manera similar, se define el conjunto de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{C})$*.*

Ejemplo

Tenemos:

1. $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$
2. $M_{3\times 1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\}.$

Definición

Una matriz de orden $m \times 1$ *se llama* $\mathit{matriz\ columna}$. *Son matrices de la forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}).$$

De manera similar, una matriz de orden $1 \times n$ *es llamada* $\mathit{matriz\ fila}$, *esto es:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{R}).$$

Definición

*Llamaremos **matriz nula** de orden $m \times n$ a la matriz:*

$$[0] = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

donde $a_{ij} = 0$ para cada i, j. Las matrices nulas se denotan como $[0]_{m\times n}$, simplemente, con el símbolo 0.

Ejemplo

Son matrices nulas:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Definición

*Llamaremos **matriz identidad** de orden $n \times n$, a la matriz $I_n = (\delta_{ij})$, donde:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

La expresión δ_{ij} se conoce como delta de Kronecker.

Ejemplo

Son matrices identidad:

1. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
2. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n. Diremos que A es una:

1. ***matriz diagonal** si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.*
2. ***matriz escalar** si existe un escalar α tal que:*

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

3. ***matriz triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.*
4. ***matriz triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.*

Ejemplo

Las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

son diagonal, escalar con $\alpha = -2$ y triangular superior, respectivamente.

Definición

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Llamaremos ***traza de*** *A al número:*

$$\begin{aligned}\mathbf{Tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde $a_{ij} = ij$. Notamos que los coeficientes en la diagonal de la matriz A, son de la forma $a_{ii} = i^2$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Luego, por definición de traza, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr}(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ representa el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, o bien, el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

Definición

Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$. Diremos que las matrices A y B son $iguales$ (denotamos $A = B$) si:

1. $m = p$ *y* $n = q$*; y*
2. $a_{ij} = b_{ij}$ *para cada* i, j.

Ejemplo

1. Las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a-3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de orden 2 son iguales si $a - 3 = 1$, i.e. si $a = 4$.

Con la relación de igualdad definida sobre el conjunto de matrices $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos establecer un álgebra de matrices.

Definición

Suma de matrices: *Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ matrices de orden $m\times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Se define la suma de A y B como la matriz $A+B$, de orden $m\times n$, definida por:*

$$\begin{aligned} A+B &= (a_{ij})+(b_{ij}) \\ &= (a_{ij}+b_{ij}). \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ en $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Luego:

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definición

Multiplicación por escalar: *Si* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Se define el* *producto por escalar* *o* *ponderación* *como el producto:*

$$\begin{aligned}\alpha \cdot A &= \alpha \cdot (a_{ij})\\ &= (\alpha \cdot a_{ij}).\end{aligned}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\alpha = -2$, entonces:

$$\alpha \cdot A = (-2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición

Multiplicación de matrices: *Sean $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. Se define la $multiplicación$ de A y B, en símbolos $A \cdot B$ o simplemente AB, como la matriz de orden $m \times p$ siguiente:*

$$AB = (d_{ij}),$$

donde $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ para cada i, j.

Ejemplo

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Luego:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Solo se pueden multiplicar matrices tales que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.
2. Sean A y B matrices con órdenes tales que la multiplicación pueda efectuarse. Si denotamos por $f_i(A)$ la fila i-ésima de A y $c_j(B)$ la columna j-ésima de B, entonces el coeficiente d_{ij} del producto AB, está dado por la multiplicación:

$$d_{ij} = f_i(A) \cdot c_j(B)$$

para cada i, j.

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, en el contexto de matrices:

$$\boxed{AB = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = 0 \quad \vee \quad B = 0}$$

4. En general, el producto no conmuta como sí ocurre en $\mathbb{R}$. Considere, por ejemplo, las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y, por otro lado:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Así, en general, tenemos:

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Propiedades

Sean A, B, C matrices cualesquiera (con órdenes tales que las operaciones consideradas pueden ser aplicadas) y α, β escalares en $\mathbb{K}$. Entonces:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. $A + B = B + A$.
3. $A + 0 = A$.
4. $A + (-A) = 0$, *donde* $-A = (-1) \cdot A$.
5. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$.

Propiedades

Sean A, B, C *matrices cualesquiera (con órdenes tales que las operaciones consideradas pueden ser aplicadas) y* α, β *escalares en* $\mathbb{K}$*.*

Entonces:

1. $1 \cdot A = A$.
2. $(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$.
3. $(AB)C = A(BC)$.
4. $A(B + C) = AB + AC$.
5. $\alpha \cdot (AB) = (\alpha \cdot A)B = A(\alpha \cdot B)$.

En particular, si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\boxed{I_m \cdot A = A = A \cdot I_n}$$