Matemática 2 MAT022

Clase 19 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Teorema (Criterio para series de términos positivos)

Sea (a_k) *una sucesión de términos positivos* $(a_k \geq 0)$. *Entonces, la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales* $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *es acotada.*

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k}{3^k + k}$.

Teorema (Criterio de la integral)

Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ *una función continua y decreciente. Sea la sucesión* $a_k = f(k)$, *entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge si y sólo si la integral* $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ *converge.*

Observación: La integral y la serie no necesariamente convergen al mismo valor.

Ejemplos

1. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.
2. La serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge.

Teorema (Criterio de comparación directa)

Sean (a_k) *y* (b_k) *dos sucesiones tales que* $0 \leq a_k \leq b_k$ *para todo* $k \geq k_0$. *Se tiene que:*

1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverge.*
2. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge.*

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las series:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}+3k}.$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}.$$
3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\ln k}.$$
4. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+3k+4}.$$
5. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\sin^2(k)}{k^2}.$$

Teorema (Criterio de comparación al límite)

Sean (a_k) y (b_k) dos sucesiones de términos positivos tales que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0.$$

Entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge.

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las series:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3 - 5k^2}{2k^6 + 4k - 1}.$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^3 + 1}}.$$