# Matemática 2 MAT022

## Clase 18 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

# Tabla de Contenidos

## Definición

Se llama **serie** a un par ordenado $((a_k), (S_n))$ de sucesiones reales tales que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : S_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

- Equivalentemente se tiene $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = S_n - S_{n-1}$, donde $S_0 = 0$ por convención.
- $(a_n)$ es llamada **sucesión de términos** de la serie.
- $(S_n)$ es llamada **sucesión de sumas parciales** de la serie.
- En general se utiliza la notación: $((a_k), (S_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

## Definición

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** si $(S_n)$ converge, es decir, si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = L$.
En caso contrario se dice que la serie **diverge**.

## Ejemplos

1. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k$ es divergente.
2. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ es convergente.

## Proposición (Álgebra de series)

*Sean* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *dos series convergentes. Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$

## Proposición

*Si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, entonces* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

El resultado anterior es un **criterio de divergencia**: si los términos de una serie $(a_k)$ no convergen a cero, entonces la serie diverge.

**Atención:** Existen series cuyos términos $(a_k)$ convergen a cero, pero son divergentes.

## Ejemplos

1. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}(k - \frac{1}{3^k})$ diverge.
2. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2}$ diverge.
3. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ diverge.
4. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ diverge, pero $\lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = 0$.

## Definición

Una serie de la forma $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ es llamada **serie telescópica**.

Notemos que las sumas parciales tienen la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Tenemos el siguiente criterio de convergencia para series telescópicas:

## Proposición

*Una serie telescópica* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ *es convergente si y sólo si la sucesión* $(a_k)$ *es convergente. En este caso:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n .$$

## Ejemplos

Mostrar la convergencia y valor de las series:

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$
2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}.$$

## Definición

Sea $r \in \mathbb{R}$. Una serie de la forma $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ es llamada **serie geométrica** de razón $r$.

Notemos que

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n,$$

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}.$$

Restando: $(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$.
Si $r \neq 1$, obtenemos

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Tenemos el siguiente criterio de convergencia para series geométricas:

## Proposición

*Una serie geométrica* $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ *es convergente si y sólo si* $|r| < 1$*. En este caso:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

## Ejemplos

Estudiar la convergencia de las series:

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k.$$
2. $$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k.$$
3. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{3^{k+1}}.$$
4. $$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} 3^{1-k}.$$