

Matemática 2 MAT022

Clase 17 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

1 Teoremas de Convergencia

Teorema

Sea (x_n) una sucesión.

- 1 Si (x_n) es creciente y acotada superiormente, entonces converge.
- 2 Si (x_n) es decreciente y acotada inferiormente, entonces converge.

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la sucesión:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Teorema (Teorema del Sandwich)

Sean las sucesiones (x_n) , (y_n) y (z_n) . Supongamos que

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L.$$

$$3 \quad x_n \leq y_n \leq z_n \text{ para todo } n \geq N_0.$$

Entonces, la sucesión (y_n) converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$.

Ejemplos

Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$1 \quad x_n = \sqrt[n]{a}, \text{ donde } a \geq 0.$$

$$2 \quad x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

$$3 \quad x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}}.$$

Teorema

Sea $f(x)$ una función real y la sucesión $x_n = f(n)$.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$.

Ejemplos

Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

1 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2 $x_n = \sqrt[n]{n}$.

Teorema

Sea (x_n) una sucesión tal que $x_n \rightarrow 0$ e (y_n) una sucesión acotada. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$.

Ejemplo

Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$.