Matemática 2 MAT022

Clase 16 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Una **sucesión** de números reales es una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, es decir, a cada natural n le asocia un real $x(n)$.

Notación. Algunas formas comunes de escribir una sucesión $x(n)$ son:

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- (x_n)
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$

Ejemplos

1. La sucesión $(2, 4, 6, \ldots)$ se puede escribir como $x_n = 2n$. También: $(2n)$ o $\{2n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Sucesión por método inductivo:
$$x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + 3,\ n \geq 2.$$
Notar que $(x_n) = (1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$.
3. Sucesión de Fibonacci:
$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n \geq 3.$$
4. Sucesión alternante: $x_n = (-1)^n$.

Definición

Sean $X = (x_n)$ e $Y = (y_n)$ dos sucesiones y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define:

1. $\alpha X = (\alpha x_n)$.
2. $X + Y = (x_n + y_n)$.
3. $XY = (x_n y_n)$.
4. Si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{X}{Y} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$.

Ejemplo

Sean $x_n = n$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$. Entonces

- $(x_n y_n) = (1)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots)$.
- $(x_n / y_n) = (n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots)$.

Definición

Una sucesión (x_n) se dice:

1. **Acotada superiormente** si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$ para todo n.
2. **Acotada inferiormente** si $\exists m \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq m$ para todo n.
3. **Acotada** si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq K$ para todo n.
4. **(Estrictamente) Creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ $\forall n$.
5. **(Estrictamente) Decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ $\forall n$.
6. **(Estrictamente) Monótona** si cumple 4 ó 5.

Ejemplos

1. $x_n = n$ es estric. creciente, acotada inferiormente (no acotada superiormente).
2. $x_n = \dfrac{1}{n}$ es estric. decreciente, acotada.
3. $x_n = (-1)^n$ es acotada, pero no es creciente ni decreciente (no es monótona).
4. $x_n = a^n$ es acotada si y sólo si $|a| \leq 1$.

Definición

Sea $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ una sucesión. Una **subsucesión** de (x_n) es una sucesión formada a partir de elementos de (x_n). Se construye considerando algunos $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$: $x_{n_k} = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{x_3}, \ldots)$. De esta forma, una subsucesión es una composición entre (x_n) y una función estrictamente creciente $Y : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Ejemplos

Algunas subsucesiones de (x_n):

1. $(x_{2n}) = (x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots)$ (lugares pares). En este caso: $Y(n) = 2n$.
2. $(x_{2n-1}) = (x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots)$ (lugares impares). En este caso: $Y(n) = 2n - 1$.
3. $(x_{n^2}) = (x_1, x_4, x_9, x_{16}, \ldots)$. En este caso: $Y(n) = n^2$.

Ejemplos

Sea $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Son subsucesiones de (x_n):

1. $x_{2n} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dots\right)$.
2. $x_{2n-1} = \left(-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{7}, \dots\right)$.

Definición

Sea (x_n) una sucesión y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que (x_n) converge a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple $|x_n - L| < \varepsilon$.
Si (x_n) tiene límite L se dice que la serie es **convergente**. En caso contrario, se dice **divergente**.

La definición anterior significa que x_n se acerca al valor L cuando n es suficientemente grande.

Notación: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ o $x_n \to L$.

Ejemplos

1. $x_n = \dfrac{1}{n}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
3. $x_n = (-1)^n$ no es convergente.
4. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
5. $x_n = n^2$ no es convergente (tiende a infinito). Se anota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
6. $x_n = -n$ no es convergente (tiende a menos infinito). Se anota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Algunos resultados con respecto al límite de sucesiones:

Teorema (Unicidad del límite)

Si una sucesión es convergente, entonces tiene un único límite.

Teorema (Álgebra de límites)

Si $x_n \to L_1$ e $y_n \to L_2$, entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = L_1 \pm L_2$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = L_1 L_2$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$, *si* $L_2 \neq 0$.

Ejemplo

Usando el álgebra de límites, calcule límite de la sucesión

$$x_n = \frac{2n^4 + 5n^2 + 1}{3n^4 + n + 2}.$$

Algunas propiedades de convergencia de sucesiones:

Teorema

Si (x_n) converge a L, entonces toda subsucesión (x_{n_k}) converge a L también.

Observación: Lo anterior implica que si (x_n):

1. tiene al menos una subsucesión divergente, entonces (x_n) diverge.
2. tiene dos subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces (x_n) diverge.

Teorema

Si $x_n \to L_1$*,* $y_n \to L_2$ *y se cumple que* $x_n \leq y_n$*, entonces* $L_1 \leq L_2$*.*

Observación: Notar que $x_n < y_n$ no implica que $L_1 < L_2$.

Por ejemplo: $x_n = \dfrac{-1}{n}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$.