Matemática 2 MAT022

Clase 15 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Proposición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *simétrica. Entonces:*

1. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ *(los valores propios de* A *son reales).*
2. *Si* $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$ *y* $\lambda_i \neq \lambda_j$*, entonces* $v_{\lambda_i} \perp v_{\lambda_j}$ *(los elementos de* W_{λ_i} *son perpendiculares a los de* W_{λ_j}*).*
3. *Para cada* $\lambda \in \sigma(A)$ *su multiplicidad algebraica es igual a su multiplicidad geométrica.*

Observación: De lo anterior, deducimos que toda matriz real simétrica es diagonalizable.

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica:

1. Como A es diagonalizable, admite una base (de $\mathbb{R}^n$) de vectores propios $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
2. Los valores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales, pero aquéllos asociados a un mismo valor propio no lo son necesariamente.

Definición

Diremos que una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es *ortonormal* si sus elementos son ortogonales entre sí y todos tienen norma 1.

Para obtener una base ortonormal de vectores propios, podemos realizar un proceso de "ortogonalización" llamado proceso o método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores l.i. en $\mathbb{R}^n$. Es posible construir m vectores ortogonales $u_1, \ldots, u_m$ tales que para cada $k = 1, \ldots, m$ se cumple

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Los vectores u_i se construyen del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
&\vdots \\
u_k &= v_k - \sum_{i=i}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i, \quad k = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $v_1 = (3,0,4)$, $v_2 = (-1,0,7)$ y $v_3 = (2,9,11)$ (Verificar que forman una base de $\mathbb{R}^3$). Obtengamos una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = v_1 = (3,0,4).$$

$$u_2 = (-1,0,7) - \frac{(-1,0,7)\cdot(3,0,4)}{9+16}(3,0,4) = (-4,0,3).$$

$$u_3 = (2,9,11) - \frac{(2,9,11)\cdot(-4,0,3)}{16+9}(-4,0,3) - \frac{(2,9,11)\cdot(3,0,4)}{9+16}(3,0,4)$$
$$= (0,9,0).$$

Ahora definimos:

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad \bar{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \quad \bar{u}_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}.$$

Gracias al proceso de ortogonalización anterior, tenemos la siguiente propiedad para las matrices simétricas:

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. Entonces, la matriz A es diagonalizable y existe una base ortonormal de vectores propios de A. Además, si V es la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales, entonces

$$V^T A V = D,$$

donde D es la matriz diagonal de los valores propios.

Observación: La matriz V es tal que $V^T = V^{-1}$ y se dice ortonormal.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determine los valores y vectores propios de A.
2. Verificar que para valores propios distintos los vectores propios asociados son ortogonales.
3. Determine una base ortonormal de vectores propios.
4. Encontrar una matriz ortonormal V tal que $V^T AV = D$.

Definición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que una expresión de la forma

$$F(v) = v^T A v$$

es una forma cuadrátrica.

Ejemplo

Formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + (b+c)xy + dy^2.$$

Notemos que también se tiene que

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En general, toda forma cuadrática $F(v) = v^T A v$ puede ser escrita en la forma $F(v) = v^T B v$, donde B es simétrica. En efecto, como $v^T A v = v^T A^T v$, entonces

$$F(v) = v^T A v = v^T \left(\frac{A + A^T}{2} \right) v.$$

Ejemplo

Escribir la forma cuadrática

$$F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2xz + y^2 + yz + 2z^2$$

en forma matricial.

Vimos que toda forma cuadrática se puede escribir como $F(v) = v^T A v$ con A una matriz simétrica, la cual es diagonalizable y existe V ortonormal tal que $A = VDV^T$. Entonces:

$$F(v) = v^T A v = v^T V D V^T v.$$

Si definimos $u = V^T v$, tenemos

$$F(u) = u^T D u.$$

La expresión anterior es llamada la forma canónica asociada a F.