Matemática 2 MAT022

Clase 14 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diremos que A es **similar** o **semejante** con B, si existe una matriz $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$P^{-1}AP = B.$$

Si A y B son semejantes, anotaremos $A \sim B$.

Teorema

Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrices semejantes, entonces:

1. $\det A = \det B$.
2. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ *(A y B tienen el mismo polinomio característico).*

Definición

Diremos que una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Esto es, que exista una matriz $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que:

$$P^{-1}AP = D.$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable. En efecto, para la matriz P dada por $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cumple que:

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[1, 2, 2].$$

Supongamos que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Defina:

$$P = \begin{pmatrix} [v_1]_{\mathcal{C}} & [v_2]_{\mathcal{C}} & \cdots & [v_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Supongamos que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz *diagonalizable* con matriz diagonal asociada $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Luego como:

$$P^{-1}AP = D \quad \Longrightarrow \quad AP = DP,$$

se tiene que la j-ésima columna del producto AP, está dado por:

$$A \cdot [v_j]_{\mathcal{C}} = \lambda_j [v_j]_{\mathcal{C}}$$

En otras palabras que $\lambda_j \in \sigma(A)$ y $v_j \in W_{\lambda_j}$.

Podemos decir, entonces que, una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si (necesariamente) existe una base para el espacio $\mathbb{R}^n$ formada por *vectores propios* de A.
De hecho, no difícil mostrar que la recíproca también es cierta.

Teorema

Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solo si $\mathbb{R}^n$ tiene una base de vectores propios de A.

Se tienen las siguientes propiedades:

Teorema

Para cada valor propio de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se tiene que la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Teorema

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz y $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ valores propios de A distintos, entonces, $W_\lambda \cap W_\mu = \{0\}$.
En particular, si $u \in W_\lambda$ y $v \in W_\mu$, entonces u y v son linealmente independientes.

De los resultados anteriores, podemos deducir el siguiente criterio de diagonalización:

Teorema

Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solo si para cada valor propio las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden.

En particular, si todos los valores propios son distintos, entonces la matriz es diagonalizable.

Observación: El recíproco no es cierto.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. ¿Es A diagonalizable? Justifique.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$. ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros a, b y c la matriz A diagonalizable? Justifique.