Matemática 2 MAT022

Clase 13 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

1. Diagonalización de matrices
   - Valores y vectores propios
   - El polinomio caracterísitico

Notación: En lo que sigue, identificaremos un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con su matriz de coordenadas $[\vec{v}]_{\mathcal{C}}$. Es decir:

$$\vec{v} \sim [\vec{v}]_{\mathcal{C}}$$

Ejemplo

1. $(2,4,-1) \sim \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$
2. $(3,-2,0,-1,1) \sim \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Definición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Diremos que un escalar λ es un **valor propio de** A si existe un vector *no nulo* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Al vector $\vec{v}$ se le llama **vector propio asociado a** λ.

Notación:

1. El conjunto de todos los valores propios A se llama el **espectro de** A y se anota como $\sigma(A)$.
2. El espacio propio asociado a λ es el conjunto:

$$W_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}.$$

Teorema

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y λ un valor propio de A, entonces $W_\lambda \leq \mathbb{R}^n$.

A continuación se presenta una forma de encontrar los valores y vectores propios de una matriz.

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) \quad &\iff \quad \exists \vec{v} \neq 0 \text{ tal que } A\vec{v} = \lambda\vec{v} \\ &\iff \quad \exists \vec{v} \neq 0 \text{ tal que } A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \\ &\iff \quad \exists \vec{v} \neq 0 \text{ tal que } \big(A - \lambda I_n\big) \cdot \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

Así, si la matriz $A - \lambda I_n$ es invertible, la solución es trivial y $W_\lambda = \{0\}$. Por tanto, se debe exigir que $\det\big(A - \lambda I_n\big) = 0$.
En conclusión:

$$\lambda \in \sigma(A) \iff (A - \lambda I_n) \text{ no es invertible } \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Definición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define el **polinomio característico de** A como el polinomio:

$$p_A(\lambda) = \det\big(A - \lambda I_n\big).$$

Teorema

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar. Son equivalentes:

1. *λ es un valor propio de A.*
2. *La matriz $\big(A - \lambda I_n\big)$ es no invertible.*
3. *$p_A(\lambda) = \det\big(A - \lambda I_n\big) = 0$ (**ecuación característica de** A).*

En particular: $\quad \lambda \in \sigma(A) \iff p_A(\lambda) = 0.$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule el polinomio característico $p_A(\lambda)$ de A.

Ejemplo

Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule:

1. Calcule el polinomio característico de A.
2. Calcule los valores propios de A.
3. Los espacios propios de A.

Para el caso anterior, ¿Es posible hallar una base para $\mathbb{R}^3$ compuesta por vectores propios de A?

Sean $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de $p(x)$. Diremos que α es una **raíz de multiplicidad** r si existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que:

$$p(x) = (x - \alpha)^r q(x)$$

con $q(\alpha) \neq 0$.

Definición

Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz y λ un valor propio de A. Llamaremos:

1. **Multiplicidad algebraica** de λ a la *multiplicidad* de λ como raíz del polinomio característico p_A.
2. **Multiplicidad geométrica** de λ a la *dimensión* W_λ como espacio propio asociado a λ.

Teorema

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz de orden n. Entonces:

1. *La suma de los valores propios de A (contando multiplicidad algebraica) es igual a la traza de A.*
2. *El producto de los valores propios de A (contando multiplicidad algebraica) es igual al determinante de A.*
3. *Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal.*

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcule el polinomio característico $p_A(\lambda)$ de A y compare con el resultado anterior.