Matemática 2 MAT022

Clase 12 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y B un subconjunto cualquiera V. Diremos que B es una **base** de V si:

1. $V = \langle B \rangle$.
2. B es l.i.

Ejemplos

1. $B = \{(1,2),(1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
2. $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
3. $B = \{1, x-1, x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.
4. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
5. $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(2,2,3)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$.
6. $B = \{1+x, x, 2+x^3\}$ no es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Ejemplos: Bases Canónicas

1. $B = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
2. $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
3. $B = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),(0,0,\ldots,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En general, se denotan como $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
4. $B = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.
6. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Dos resultados importantes sobre bases de un espacio vectorial B

Teorema

Sea V un espacio vectorial con una base B compuesta por n vectores. Entonces, cualquier subconjunto de V compuesto de $n+1$ (o más) vectores es un conjunto l.d.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base compuesta de n vectores, entonces toda base de V está compuesta de n vectores.

En conclusión, las bases de V tienen exactamente el mismo número de elementos. A este número se le llama **dimensión del espacio V**.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V. Llamamos **dimensión de V sobre $\mathbb{K}$** al tamaño de la base B. Lo denotamos como

$$\dim_{\mathbb{K}} V = n.$$

Observaciones:

1. $\dim\{0\} = 0$.
2. Si $\dim V = n$, entonces todo conjunto que tenga más de n vectores es l.d.
3. Si $\dim V = n$, entonces ningún subconjunto de V con menos de n vectores puede generar V.

Ejemplos

Gracias a las bases canónicas, podemos deducir la dimensión de algunos espacios conocidos:

1. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.
2. $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.
3. $\dim M_{n\times n}(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim M_{n\times m}(\mathbb{R}) = n \cdot m$.
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

- Si $\dim V$ es finita, entonces:

$$W \leq V \implies \dim W \leq \dim V.$$

- **Completación de una base.** Sea V un espacio vectorial con $\dim V = n$. Sea $W \leq V$ con $\dim W = m < n$ y base $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Entonces, existen $u_{m+1}, \ldots, u_n \in V$ tales que el conjunto

$$B \cup \{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$$

  es una base de V.
- Si $\dim V = n$ y $B = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ es l.i., entonces B es una base de V.

Ejemplo

Sea W el subespacio de las matrices simétricas de orden 2. El conjunto $B \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dado por:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para W. ¿Cuál es la dimensión de W?

Ejemplo

Obtenga una base para el espacio vectorial:

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0\}.$$

Calcule $\dim W$.

Para finalizar con bases, observamos lo siguiente:

Consideremos $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i,$$

donde los vectores $e_1,\ e_2, \ldots,\ e_n$ son la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Los escalares $v_1, \ldots, v_n$ corresponden a las coordenadas del vector $\vec{v}$.

La observación anterior puede generalizarse a cualquier espacio vectorial y cualquier base:

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V. Entonces, dado cualquier vector $u \in V$, existen *únicos* escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $\mathbb{K}$ tales que:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son llamadas **coordenadas de** v con respecto a la base B.

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ordenada de V y $u \in V$ un vector cualquiera. Se definen las **coordenadas del vector** u **respecto a la base** B a la matriz columna:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

cuyos coeficientes son los únicos escalares que hacen cierta la combinación lineal

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Ejemplo

Sea $u = (-1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$. Hallar las coordenadas de u respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo

Sea $u = (-1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$. Hallar las coordenadas de u respecto a la base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 2, -1, 2), (0, -1, 2, 3), (0, 0, -2, -2), (0, 0, 0, -1)\}.$$

Ejemplo

Sea $B = \{-1, x+1, 1-x^2\}$. Verifique que B es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.
Sea el polinomio

$$p(x) = 2 - x + 3x^2.$$

Determine las coordenadas de $p(x)$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y a la base B.