Matemática 2 MAT022

Clase 11 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

Tabla de Contenidos

Recordemos que, dado un espacio vectorial V y un subconjunto $W \subseteq V$ tal que $0 \in W$ se tiene que:

$$W \leq V \quad \Longleftrightarrow \quad \Big\{\forall u, v \in W,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \Longrightarrow \alpha u + v \in W\Big\}.$$

En este contexto, decimos que el vector $\alpha u + v$ es una **combinación lineal** de los vectores u y v. La definición anterior también vale para una familia de vectores $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$ en V.

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares en $\mathbb{K}$ una expresión del tipo:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

es llamada una **combinación lineal** de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Diremos, además, que $v \in V$ es una **combinación lineal** de $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i. \end{aligned}$$

Ejemplo

- El vector $\vec{u} = (-4, -5, 8)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1 = (2, 1, -2)$ y $\vec{v}_2 = (1, -1, 1)$. En efecto $\vec{u} = -3\,\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.
- En $\mathbb{R}[x]$, $p(x) = x^2 - x + 1$ es combinación lineal de $q(x) = (x-1)^2$ y $h(x) = x$. En efecto $p(x) = 1\,q(x) + 1\,h(x)$.
- En $M_2(\mathbb{R})$, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ no es combinación de las matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y S un conjunto de vectores en V. Llamaremos **espacio generado por** S al conjunto:

$$\langle S\rangle = \{\text{combinaciones lineales de vectores en S}\}.$$

Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$.

- Anotamos:

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &= \langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{K}\right\}.\end{aligned}$$

- Un elemento $v \in \langle S\rangle$ si y solo si existen $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Teorema

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S \subseteq V$ cualquiera, entonces:

$$\langle S \rangle \leq V.$$

Ejemplo

1. Considerar los vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$ en $\mathbb{R}^3$. ¿Se cumple que:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\}?$$
2. ¿ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$?

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $u_1,\, u_2, \ldots,\, u_n$ vectores en V. Diremos que los vectores $u_1,\, u_2, \ldots,\, u_n$ son **linealmente independientes** (l.i.) en V si:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \implies \alpha_i = 0,\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

En caso contrario, diremos que son **linealmente dependientes** (l.d.) si existen escalares $\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$$

Ejemplo

1. Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es l.d.
2. El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ es un conjunto l.d. en $\mathbb{R}^2$.
4. El conjunto $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{R}^3$.
5. El conjunto $\{(1,0,-1),(-1,1,1),(5,-2,-5)\}$ es un conjunto l.d. en $\mathbb{R}^3$.
6. El conjunto $\{1, x-1, x^2+x\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{R}[x]$.
7. Sea $\alpha \neq \beta$. El conjunto $\{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ es l.i. en el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Sean X e Y subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $Y \subset X$. Se cumple:

1. Si X es un conjunto l.i., entonces Y es un conjunto l.i.
2. Si Y es un conjunto l.d., entonces X es un conjunto l.d.

Teorema

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $X \subseteq V$ tal que $1 < |X| \leq n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $S \subseteq X$ linealmente independiente tal que:

$$\langle X \rangle = \langle S \rangle.$$