# Matemática 2 MAT022

## Clase 10 (Complementos)

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María

# Tabla de Contenidos

## Definición

Sea $V$ un conjunto no vacío y sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se definen sobre $V$ dos operaciones:

1. **Adición:** Es una función que a cada par de elementos $u, v \in V$ les asigna un elemento $u + v \in V$.
2. **Producto por escalar:** Es una función que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ y cada $v \in V$ les asigna un elemento $\alpha \cdot v \in V$.

## Definición

Un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$ es un conjunto $(V, +, \cdot)$ que tiene una adición y multiplicación por escalar que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$.
2. $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$.
3. $\exists\, 0_V \in V$ tal que $v + 0_V = v \quad \forall v \in V$
4. $\forall v \in V, \exists(-v) \in V$ tal que $v + (-v) = 0_V$.
5. $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$.
6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
7. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \quad \forall v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

## Definición

Los elementos de $V$ se llaman **vectores** y los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman **escalares**.

## Ejemplos

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ **no** es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
2. $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
3. El conjunto de los polinomios con coeficientes reales

   $$\mathbb{R}[x] = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

   es un espacio vectorial real.
4. El conjunto de las funciones reales

   $$\mathcal{F} = \{f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

   con las operaciones:

   - $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in \mathcal{F},$
   - $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}$

   es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

## Ejercicio

Sean $X$ un conjunto cualquiera no vacío y $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se define el conjunto $\mathcal{F}(X;V)$ como el conjunto de todas las funciones $f : X \to V$. Es decir:

$$\mathcal{F}(X;V) = \{f : X \to V : f \text{ es función}\}.$$

Dotemos a $\mathcal{F}(X;V)$ de las operaciones adición ($f \oplus g$) y producto por escalar ($\alpha \odot f$) siguientes:

- $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$.
- $(\alpha \odot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.

Demuestre que $(\mathcal{F}(X;V), \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

## Definición

Sean $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $W \subseteq V$. Diremos que $W$ es un **subespacio vectorial de** $V$ si $W$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En este caso anotaremos $W \leq V$.

Como $W \subseteq V$, las operaciones sobre los elementos de $W$ son las operaciones del espacio $V$.

## Teorema (Caracterización de subespacio)

*Sean $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $W \subseteq V$. Entonces, $W \leq V$ si y solo si se satisfacen las tres condiciones:*

1. $0_V \in W$.
2. $\forall u, v \in W$ *se cumple* $u + v \in W$.
3. $\forall v \in W$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *se cumple* $\alpha \cdot u \in W$.

## Ejemplos

1. Si $V$ es un espacio vectorial, entonces $V \leq V$ y $\{0\} \leq V$. Estos son llamados los **subespacios triviales** de $V$.
2. Las rectas que contienen al origen son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.
3. En $\mathbb{R}^3$ los planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
4. Las matrices simétricas y las matrices antisimétricas son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
5. El conjunto de los polinomios de grado menor o igual a $n$

$$\mathbb{R}_n[x] = \left\{p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.
6. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto de las funciones continuas de $I$ en $\mathbb{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$.

## Ejemplo

Sea $W$ definido por:

$$W = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_0^1 p(x)dx = p'(1) \right\}.$$

Verifique que $W \leq \mathbb{R}_3[x]$.

## Ejemplo

Sea $W$ definido por:

$$W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a_{11} = a_{22}, a_{21} = -a_{12}\}.$$

Verifique que $W \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

## Proposición

*Sean $W_1$ y $W_2$ subespacios vectoriales de $V$. Se cumple que:*

1. $W_1 \bigcap W_2 \leq V$.
2. $W_1 + W_2 \leq V$, *donde*

$$W_1 + W_2 = \left\{ w \in V : \exists w_i \in W_i, i = 1, 2, \text{ tal que } w = w_1 + w_2 \right\}.$$

## Ejemplo

Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1. Sea $W_A$ el conjunto de todas las matrices $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que:
$$A^T X = XA^2.$$
Verifique que $W_A \leq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. ¿Existen subespacios $W_1$ y $W_2$ de $W_A$ de modo que $W_A = W_1 + W_2$? Justifique.

## Definición

Sean $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $W_1, W_2 \leq V$. Diremos que $V$ es **suma directa** de los subespacios $W_1$ y $W_2$ si:

1. $W_1 \bigcap W_2 = \{0\}$.
2. $V = W_1 + W_2$.

En tal caso anotaremos $V = W_1 \bigoplus W_2$.

## Ejercicios

1. Considerar el plano $W : x + y - z = 0$ y la recta $L : x = y = z$. Se cumple que $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus L$.

2. En $V = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, defina $\mathcal{F}_P$ como el subespacio de las funciones pares (¡verificar!) y $\mathcal{F}_I$ el subespacio de las funciones impares (¡verificar!). Entonces:

$$V = \mathcal{F}_P \bigoplus \mathcal{F}_I.$$

3. Demuestre que el espacio de matrices de orden $n$ puede descomponerse como suma directa de las matrices simétricas y las antisimétricas.