



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA
Departamento de Matemática

Apunte
MAT-379: Optimización y Control
Versión marzo 2022
Profesores: Nicolás Carreño y Rodrigo Lecaros.

Índice general

1	Cálculo de Variaciones	3
1.1	Introducción	3
1.1.1	Contenidos del curso	3
1.1.2	Ejemplos típicos del cálculo de variaciones	3
1.1.3	Ejemplo de un problema de control	4
1.2	Condición necesaria de primer orden: Ecuación de Euler-Lagrange	5
1.2.1	Algunos casos particulares	8
1.2.2	Generalización a n funciones	9
1.3	Extremos variables (intervalo fijo)	11
1.4	Extremos (del intervalo) variables	12
1.5	Variación general	13
1.5.1	Extremos sobre curvas	14
1.5.2	Extremales quebrados	15
1.6	Variables y ecuaciones canónicas de Euler-Lagrange	17
1.6.1	Una interpretación física	18
1.7	Problemas isoperimétricos	18
1.8	Condiciones de segundo orden	20
1.8.1	Segunda variación de un funcional	20
1.8.2	Condición necesaria para extremos de J	21
1.8.3	Ecuación de Jacobi y puntos conjugados	22
1.8.4	Condiciones suficientes para extremos de J	25
2	Control y Estabilización de Sistemas Lineales	29
2.1	Controlabilidad	29
2.2	Caso autónomo	30
2.3	Caso no autónomo	34
2.4	Observabilidad y dualidad	39
2.5	Estabilización de sistemas lineales	41
2.5.1	Preliminares	41
2.5.2	Estabilización de sistemas de control	42
2.5.3	Teorema de Localización de Polos	44

3	Control Óptimo de Sistemas Lineales	49
3.1	Introducción	49
3.2	Problema de tiempo mínimo	50
3.2.1	Principio del Máximo (caso lineal)	54
3.2.2	Ejemplo del carro-cohete con dos motores	56
3.3	Problema de costo cuadrático	59
3.3.1	Principio del máximo (caso LC)	62
3.3.2	Función valor y ecuación matricial de Riccati	64
3.3.3	Aplicaciones de los problemas LC	67

1. Cálculo de Variaciones

1.1 Introducción

1.1.1 Contenidos del curso

1. Cálculo de Variaciones
2. Control y estabilización de sistemas lineales
3. Control óptimo

1.1.2 Ejemplos típicos del cálculo de variaciones

■ **Ejemplo 1.1 — El camino más corto.** Encontrar la curva más corta que une a los puntos $A = (a, y_0)$ y $B = (b, y_1)$.

Buscamos una curva plana $y \equiv y(x)$ (suponemos que es una función). El largo de una curva, parametrizada como una función, está dada por

$$J(y) := \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

De esta forma, el problema queda planteado como:

$$\min_y J(y), \text{ donde } y \text{ es tal que } y(a) = y_0, y(b) = y_1$$

Sol: La recta que une A y B . ¿Cómo se obtiene esta solución sin usar la intuición? ■

■ **Ejemplo 1.2 — Braquistócrona.** Encontrar la curva (resbalín) que lleva la pelota desde A a B en el menor tiempo posible.

Dados dos puntos $A = (a, y_0)$ y $B = (b, y_1)$ ($y_0 > y_1$), buscamos una función $y = y(x)$ solución del problema

$$\begin{cases} \min_y T \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1 \end{cases}$$

donde T es el tiempo de A a B usando solo la gravedad en el resbalín $y = y(x)$.

¿Cómo obtener T , en función de la curva y ? Observamos que la rapidez esta dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (y'(x))^2},$$

con $y' = \frac{dy}{dx}$. De esto deducimos

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} dx.$$

Ahora lo que falta es obtener $v = v(y)$. Utilizando la conservación de la energía, tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0,$$

$$\implies v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

De esta forma, obtenemos

$$T = \int_0^T dt = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx.$$

La solución es la Cicloide. ¿cómo se encuentra? ■

El problema del cálculo de variaciones, de forma abstracta

Estos problemas se pueden formular como

$$(P) \begin{cases} \min_y J(y) := \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1 \end{cases}$$

Las principales preguntas sobre este problema son:

- ¿Condiciones sobre J e $y(x)$ para existencia de soluciones de (P) ?
- ¿Cómo encontrar las soluciones de (P) ?

1.1.3 Ejemplo de un problema de control

Consideremos un oscilador armónico simple aplicado a una partícula de masa $m = 1$, lo cual es modelado por:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k(x - l) &= u \\ x &= x(t), \dot{x} = x'(t) \\ u &= u(t), \end{aligned}$$

donde u representa una fuerza externa y l es el largo natural del resorte.

Problema 1.1 Dado $T > 0$, encontrar una función $u(t)$ tal que lleve el resorte al reposo en su largo natural:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 & \xrightarrow{u=?} x(T) = l \\ \dot{x}(0) = y_0 & \xrightarrow{\quad} \dot{x}(T) = 0 \end{aligned}$$

Este es un problema de controlabilidad y llamamos $u = u(t)$ el **control**.

Problema 1.2 Si el Problema 1.1 es posible resolver, ¿existe una función u tal que $|u(t)| \leq 1$ y que lleve la masa al equilibrio en un tiempo mínimo?

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 & \xrightarrow{u(t)} x(T) = l \\ \dot{x}(0) = y_0 & \xrightarrow{\text{mín } T} \dot{x}(T) = 0 \end{aligned}$$

Este es un problema de control óptimo.

1.2 Condición necesaria de primer orden: Ecuación de Euler-Lagrange

Comencemos por el más simple de los problemas variacionales. Sea $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entre todas las curvas $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1,$$

encontrar mínimos (locales) del funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Escribiremos

Problema 1.3

$$(P) \begin{cases} \text{mín}_y J(y) \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1. \end{cases}$$

Obs.

- L se llama **Lagrangeano**.
- Las soluciones de (P) se llaman **extremos** de $J(y)$.
- Nos interesa encontrar un método para encontrar soluciones de (P)

Notación 1.1. Para $L = L(x, y, z)$, denotamos

$$L_x := \frac{\partial L}{\partial x}, \quad L_y := \frac{\partial L}{\partial y}, \quad L_z := \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Enunciaremos algunos lemas útiles:

Lema 1.2.1 Sean $\alpha, \beta \in C(a, b)$ tales que

$$\int_a^b (\alpha h + \beta h') dx = 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0 = h(b).$$

Entonces, $\beta \in C^1(a, b)$ y $\beta' = \alpha$.

Lema 1.2.2 Sea $\alpha \in C(a, b)$ tal que

$$\int_a^b \alpha h' dx = 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0 = h(b).$$

Entonces, α es constante. Más aún: $\alpha(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(t) dt$.

Ahora estamos en posición de enunciar el resultado principal:

Teorema 1.2.3 Supongamos $L = L(x, y, z)$ de clase $C^1(a, b)$ y sea $y = y(x)$ una solución de (P). Entonces,

- $L_z(x, y(x), y'(x))$ es de clase $C^1(a, b)$;
- $L_y(x, y(x), y'(x)) = \frac{d}{dx} L_z(x, y(x), y'(x)), \quad \forall x \in (a, b)$. (E-L)
(Ecuación de Euler-Lagrange)

Demostración. Sea $y \in C^1(a, b)$, busquemos condiciones necesarias para que $y(x)$ sea solución de (P).

Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\phi(t) = J(y + th),$$

donde h es una *perturbación* de y , es decir,

$$h \in C^1, \quad h(a) = 0, \quad h(b) = 0.$$

Como $J(y) \leq J(y + th), \forall t \in \mathbb{R}$ (al menos para $|t| \leq 1$)

$$\implies \phi \text{ tiene un mínimo en } t = 0.$$

Además, $\phi \in C^1$ lo que implica que $\phi'(0) = 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d}{dt} J(y + th) = \frac{d}{dt} \int_a^b L(x, y + th, y' + th') dx \\ &= \int_a^b \left(L_y(x, y + th, y' + th') h + L_z(x, y + th, y' + th') h' \right) dx. \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$\phi'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \left(L_y(x, y, y') h + L_z(x, y, y') h' \right) dx = 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), \quad h(a) = h(b) = 0$$

Utilizando el Lema 1.2.1 con $\alpha = L_y(x, y, y')$ y $\beta = L_z(x, y, y')$, obtenemos

- $\frac{d}{dx} L_z(x, y, y') \in C(a, b)$
- $L_y = \frac{d}{dx} L_z, \quad \forall x \in (a, b)$

Obs.

- Usualmente (E-L) se escribe: $L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$
- Las soluciones de (E-L) se llaman **extremales**.
- Todo extremo de J es extremal, pero no todo extremal es extremo de J (sol. de (P)).
- Como (E-L) es una EDO de 2do orden, se espera que las condiciones de borde determinen un único extremal. En este caso, **y si (P) admite solución**, el extremal es la solución de (P).

Veamos ahora las demostraciones de los Lemas 1.2.1 y 1.2.2

Demostración Lema 1.2.2. Sea $h(x) = \int_a^x (\alpha(t) - c) dt$, donde $c \in \mathbb{R}$ es tal que $h(b) = 0$, es decir

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b \alpha(t) dt.$$

Notemos que

- $h(a) = 0$
- $\alpha \in C$, lo que implica que $h \in C^1$
- Por hipótesis

$$0 = \int_a^b \alpha h' dx = \int_a^b \alpha(\alpha - c) dx$$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha - c)^2 dx &= \int_a^b \alpha(\alpha - c) - c \int_a^b (\alpha - c) \\ &= \int_a^b \alpha h' dx - ch(b) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha = c, \quad \forall x \in (a, b)$$

■

Demostración Lema 1.2.1. Sea $\gamma(x) = \int_a^x \alpha(t) dt$. Claramente $\gamma \in C^1(a, b)$ y $\gamma' = \alpha$, reemplazando en la hipótesis, obtenemos

$$0 = \int_a^b (\alpha h + \beta h') dx = \int_a^b (\gamma' h + \beta h') dx,$$

integrando por partes

$$0 = \int_a^b (\alpha h + \beta h') dx = \int_a^b (-\gamma + \beta) h' dx, \quad \forall h \in C^1, \quad h(a) = h(b) = 0.$$

De esta forma, utilizando el Lema 1.2.2, tenemos

$$-\gamma + \beta = c^{te},$$

lo que implica que:

- $\beta \in C^1(a, b)$.
- $\beta' = \gamma' = \alpha$.

■

■ **Ejemplo 1.3** Consideremos

$$L = \sqrt{1 + (y')^2},$$

observemos que $L_y = 0$, de esta forma (E-L) es

$$\frac{d}{dx} L_{y'} = 0,$$

lo que implica $L_{y'} = cte$, es decir

$$L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = cte \Rightarrow y' = cte$$

$$\Rightarrow y = \alpha + \beta x, \text{ es una recta.}$$

■ **Ejemplo 1.4** Estudiemos el problema

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín}_y \int_0^1 y(y')^2 dx \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{array} \right.$$

La (E-L) en este caso es

$$(y')^2 = \frac{d}{dx}(2yy'),$$

$y \equiv 0$ es solución de (E-L) más sus condiciones de borde (es la única).

Pero, si consideramos

$$y(x) = \lambda x^2(1-x)^2,$$

con λ constante, obtenemos

$$J(y) = \lambda^3 \int_0^1 x^4(1-x)^4(1-2x)^2 dx,$$

de esta forma $J(y) \rightarrow -\infty$ cuando $\lambda \rightarrow -\infty$, lo que implica que no existe el mínimo del problema estudiado.

1.2.1 Algunos casos particulares

Obs. Recuerdo notación: Para $L = L(x, y, z)$, denotamos

$$L_x := \frac{\partial L}{\partial x}, \quad L_y := \frac{\partial L}{\partial y}, \quad L_{y'} := \frac{\partial L}{\partial z}.$$

$$(E-L) \quad \boxed{L_y = \frac{d}{dx} L_z}$$

Veremos algunos casos particulares de la ecuación de Euler-Lagrange

1. $L = L(x, y')$: El Lagrangeano no depende de y , utilizando (E-L) obtenemos

$$\boxed{L_{y'}(x, y'(x)) = C^{te}},$$

lo cual corresponde a una EDO de 1er orden.

• $L_{y'}$ es llamado **momentum**.

2. $L = L(y, y')$: El Lagrangeano no depende de la variable independiente, se suele llamar el caso **autónomo** y desde (E-L) se obtiene

$$L(y(x), y'(x)) - y'(x)L_{y'}(y(x), y'(x)) = C^{te},$$

lo cual corresponde a una EDO de 1er orden.

- $y'L_{y'} - L$ es llamado **Hamiltoniano**.

3. $L = L(x, y)$: En este caso, L no depende de y' y (E-L) corresponde a

$$L_y(x, y(x)) = 0,$$

lo cual **no es una ecuación diferencial**.

Veamos cómo obtener el caso *autónomo*. Consideremos el **Hamiltoniano**, asociado a una solución de la ecuación (E-L), esto es

$$H(x) := y'(x)L_{y'}(y(x), y'(x)) - L(y(x), y'(x)),$$

donde y es solución de (E-L), veamos que H es constante, para ello lo derivamos respecto de x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}H &= \frac{d}{dx}(y'L_{y'} - L) \\ &= y''L_{y'} + y' \frac{d}{dx}L_{y'} - L_y y' - L_{y'} y'' \\ &= y' \left(\frac{d}{dx}L_{y'} - L_y \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $H = C^{te}$.

■ **Ejemplo 1.5** $L = \sqrt{1 + (y')^2}$, el Lagrangeano del camino más corto, este es **autónomo**, de lo que se deduce que el **Hamiltoniano** es constante, es decir

$$\begin{aligned} H &= y'L_{y'} - L \\ &= \frac{(y')^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \sqrt{1 + (y')^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C^{te} \end{aligned}$$

■

1.2.2 Generalización a n funciones

Sea $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entre todas las curvas $y_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^1 \forall i = 1, \dots, n$, tales que

$$y_i(a) = y_0^i, \quad y_i(b) = y_1^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

encontrar mínimos (locales) del funcional

$$J(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx.$$

Escribamos:

$$(P_n) \begin{cases} \text{mín}_y J(y_1, \dots, y_n) \\ y_i(a) = y_0^i, y_i(b) = y_1^i, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

■ **Ejemplo 1.6** Este caso se aplica, por ejemplo, a curvas vectoriales. Una curva en \mathbb{R}^3 , $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con condiciones iniciales y finales

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(b) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

■

Lema 1.2.4 Si (y_1, \dots, y_n) es una solución de (P_n) , entonces es solución del **sistema de n ecuaciones de E-L**:

$$L_{y_i} = \frac{d}{dx} L_{y_i'}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demostración. Sea $\phi(t) := J(y_1 + th_1, \dots, y_n + th_n) \in C^1$, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 (si $L \in C^1$), donde $h_i \in C^1$ tal que $h_i(a) = 0 = h_i(b)$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Si y_1, \dots, y_n es solución de (P_n) entonces ϕ tiene mínimo en $t = 0$, y como es diferenciable, tenemos $\phi'(0) = 0$. Calculemos la derivada de ϕ

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_a^b \frac{d}{dt} L(x, y_1 + th_1, \dots, y_n + th_n, y_1' + th_1', \dots, y_n' + th_n') dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(L_{y_i}(x, y_1 + th_1, \dots, y_n + th_n, y_1' + th_1', \dots, y_n' + th_n') \cdot h_i \right. \\ &\quad \left. + L_{y_i'}(x, y_1 + th_1, \dots, y_n + th_n, y_1' + th_1', \dots, y_n' + th_n') \cdot h_i' \right) dx \end{aligned}$$

de esta forma $\phi'(0) = 0$ es equivalente a

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left(L_{y_i}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') \cdot h_i + L_{y_i'}(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') \cdot h_i' \right) dx = 0,$$

para todo $h_i \in C^1$, $h_i(a) = h_i(b) = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Para $j = 1, \dots, n$ tomamos $h_i \equiv 0$ cuando $i \neq j$, obtenemos

$$\int_a^b \left(L_{y_j} h_j + L_{y_j'} h_j' \right) dx = 0, \quad \forall h_j \in C^1, h_j(a) = h_j(b) = 0.$$

Finalmente utilizando el Lema 1.2.1, tenemos

- $L_{y_j'} \in C^1$, $\forall j = 1, \dots, n$
- $L_{y_j} = \frac{d}{dx} L_{y_j'}$, $\forall j = 1, \dots, n$

■

1.3 Extremos variables (intervalo fijo)

Sea la siguiente variación del problema básico del Cálculo de Variaciones (P)

$$(P') \begin{cases} \min_y J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \\ y(a) = y_0, \quad y(b) \text{ libre } (y(b) \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

En este caso no se conoce el valor de $y(b)$, por lo tanto es parte de lo que se trata de encontrar, de modo de minimizar el funcional J .

Teorema 1.3.1 Las condiciones necesarias para una solución y de (P') son

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$$

$$L_{y'}|_{x=b} = 0$$

(Condición de borde natural)

$$+ y(a) = y_0$$

Demostración. Sea y solución de (P') y sea $\phi(t) = J(y + th)$, donde h es una perturbación de clase C^1 tal que $h(a) = 0$.

Si repetimos los pasos realizados en los casos anteriores:

$$\phi'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (L_y(x, y, y')h + L_z(x, y, y')h') dx = 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, \quad (1.1)$$

tomando funciones h tal que $h(b) = 0$, por el Lema 1.2.1, tenemos $L_{y'} \in C^1$ y

$$(E-L) \quad L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$$

Integrando por partes (1.1)

$$\int_a^b \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) h dx + L_{y'} h|_a^b = 0, \quad \forall h \in C^1, h(a) = 0.$$

utilizando la ecuación de (E-L) y la condición $h(a) = 0$, obtenemos

$$L_{y'}(b, y(b), y'(b))h(b) = 0, \quad \forall h \in C^1, h(a) = 0,$$

lo que implica

$$L_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0.$$

■

¿Qué condiciones se encuentran si $y(a)$ es libre e $y(b)$ fijo? ¿Si ambos extremos son libres?

Ejercicio 1.1 Encuentre las condiciones necesarias para estos casos. ■

■ **Ejemplo 1.7** Considere $L = \sqrt{1 + (y')^2}$ el Lagrangeano asociado al camino más corto. Ahora buscamos el camino más corto, pero con $y(b)$ libre, esto es el camino más corto desde un punto $(a, y(a))$ hasta la recta vertical $x = b$.

La ecuación de (E-L) implica que las soluciones son rectas, veamos la condición de borde natural, es decir

$$L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \Rightarrow y'(b) = 0,$$

es decir, la recta horizontal. ■

Ejercicio 1.2 Encuentre la solución asociada a minimizar la distancia entre dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$ con a y b fijos. ■

1.4 Extremos (del intervalo) variables

Consideremos una generalización de los problemas vistos en las secciones anteriores:

$$(P'_g) \begin{cases} \min_{y \in C^1} J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \\ y(a) = y_0, \quad b \text{ libre}, \quad y(b) \text{ libre.} \end{cases}$$

Nos interesa encontrar condiciones necesarias para una solución y de (P'_g) .

$$\text{Sea } \phi(t) = \int_a^{b+t\Delta x} L(x, y+th, y'+th') dx.$$

Obs.

- b es una incógnita del problema.
- $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1 y tiene un mínimo en $t = 0$ ($\phi'(0) = 0$).
- $\Delta x \in \mathbb{R}$ (pert. de b), $h \in C^1$, $h(a) = 0$ (pert. de y).
- Para trabajar en el $[b, b+t\Delta x]$, se extienden y y h linealmente.

Extensión lineal $x > b$: $y(x) = y(b) + y'(b)(x - b)$

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_a^{b+t\Delta x} \left(L_y(x, y+th, y'+th')h + L_{y'}(x, y+th, y'+th')h' \right) dx \\ &\quad + L(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)) \Big|_{x=b+t\Delta x} \Delta x, \end{aligned}$$

de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \int_a^b \left(L_y(x, y(x), y'(x))h + L_{y'}(x, y(x), y'(x))h' \right) dx + L(b, y(b), y'(b))\Delta x \\ &= \int_a^b \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) h dx + L_{y'} \Big|_b h(b) + L \Big|_b \Delta x \\ &= 0, \end{aligned}$$

en particular si tomamos $\Delta x = 0$ y $h(b) = 0$ obtenemos

$$\boxed{L_{y'} \in C^1}, \wedge \boxed{L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}}.$$

Observamos que dada una perturbación en la vertical Δy , esto debe implicar un valor de $h(b)$, observemos que se debe cumplir

$$y(b + t\Delta x) + th(b + t\Delta x) = y(b) + t\Delta y + o(t),$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$. Utilizando que y, h fueron extendidos de forma lineal, obtenemos

$$y(b) + y'(b)t\Delta x + th(b) + t^2 h'(b)\Delta x = y(b) + t\Delta y + o(t),$$

de esta forma a orden t , obtenemos

$$y'(b)\Delta x + h(b) = \Delta y.$$

Reemplazando $h(b) = -y'(b)\Delta x + \Delta y$, en la expresión de $\phi'(0)$, obtenemos

$$\phi'(0) = \int_a^b \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) h dx + L_{y'} \Delta y + (L - y' L_{y'}) \Big|_b \Delta x = 0,$$

de esta forma podemos concluir el siguiente resultado

Teorema 1.4.1 Las condiciones necesarias para una solución y de (P'_g) son

$$\boxed{L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}}$$

$$\boxed{L_{y'}|_{x=b} = 0}$$

$$\boxed{(L - y' L_{y'})|_{x=b} = 0}$$

$$+ y(a) = y_0$$

1.5 Variación general

Un problema más general sería:

$$(P_g) \begin{cases} \min_{y \in C^1} J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \\ a \text{ libre}, \quad y(a) \text{ libre}, \quad b \text{ libre}, \quad y(b) \text{ libre}. \end{cases}$$

Tomando $\phi(t) = \int_{a+t\Delta x_a}^{b+t\Delta x_b} L(x, y + th, y' + th') dx$, y siguiendo las ideas expuestas en el caso anterior se obtiene se obtiene

$$\boxed{\phi'(0) = \int_a^b \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) h dx + (L - y' L_{y'}) \Delta x \Big|_{x=a}^{x=b} + L_{y'} \Delta y \Big|_{x=a}^{x=b}}$$

Obs. La expresión de $\phi'(0)$ se llama **Variación general** del funcional J y se suele anota δJ .

Obs. Desde la **Variación general** podemos obtener las condiciones para:

- El problema (P) (el más simple) que tiene extremos fijos, se recupera cuando tomamos $\Delta x = \Delta y = 0$
- El problema (P') b fijo pero $y(b)$ libre, esto se recupera cuando $\Delta x = 0$ y $\Delta y \in \mathbb{R}$, lo que implica $L_{y'} \Big|_{x=b} = 0$

Ahora estamos en posición de enunciar el siguiente resultado

Teorema 1.5.1 Las condiciones necesarias para una solución y de (P_g) son

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$$

$$L_{y'} \Big|_{x=a} = L_{y'} \Big|_{x=b} = 0$$

$$(L - y' L_{y'}) \Big|_{x=a} = (L - y' L_{y'}) \Big|_{x=b} = 0$$

1.5.1 Extremos sobre curvas

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Consideremos

$$(P_c) \begin{cases} \min_{y \in C^1} J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \\ y(a) = y_0, \quad y(b) = \varphi(b), \quad b \text{ libre.} \end{cases}$$

En este caso b es una incógnita y φ es un dato del problema. Observemos que

$$\Delta y = \varphi'(b) \Delta x.$$

Entonces, utilizando la **Variación general**, podemos enunciar el siguiente resultado

Teorema 1.5.2 Las condiciones necesarias para una solución y de (P_c) son

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'}$$

Condición de transversalidad

$$(L + (\varphi' - y') L_{y'}) \Big|_{x=b} = 0$$

$$y(a) = y_0$$

Demostración. Reemplazando $\Delta y = \varphi'(b) \Delta x$, en la variación general de J , obtenemos

$$\delta J = \int_a^b (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) h dx + (L - y' L_{y'}) \Delta x \Big|_{x=b} + L_{y'} \varphi'(b) \Delta x \Big|_{x=b}.$$

Imponiendo que $\delta J = 0$ y utilizando que h y Δx son arbitrarios, se concluye el resultado. ■

■ **Ejemplo 1.8** Distancia mínima entre un punto y una curva φ dada.

Consideramos

$$L = \sqrt{1 + (y')^2},$$

desde la condición de E-L y observando que L no depende de y , obtenemos

$$L - y'L_{y'} = C^{te},$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C^{te},$$

lo que implica que y' es constante, es decir, y es una recta $y(x) = Ax + B$.

La condición de transversalidad en $x = b$ corresponde a

$$L\Big|_{x=b} + (\varphi'(b) - y'(b))L_{y'}\Big|_{x=b} = 0$$

$$\iff \frac{1 + \varphi'(b)y'(b)}{\sqrt{1 + (y'(b))^2}} = 0 \iff \varphi'(b)y'(b) = -1,$$

esto es, que la recta y que parte desde (a, y_0) es perpendicular a φ en el punto $x = b$. ■

1.5.2 Extremales quebrados

Consideremos el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} \min_y J(y) = \int_{-1}^1 y^2(1 - y')^2 dx \\ y(-1) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 1.3 Tratar de encontrar la solución asociada a la ecuación de E-L para el problema (P). ■

Observemos que $\inf(P) \geq 0$, dado que $J(y) \geq 0, \forall y \in C^1$.

Ejercicio 1.4 Encontrar una familia $(y_\varepsilon) \subset C^1$ tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(y_\varepsilon) \rightarrow 0$. ■

Observemos que $J(y) = 0$ para

$$y(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

la cual tiene una “esquina” en $x = 0$.

Obs. Una función es $C^1([a, b])$ por pedazos si es continua en $[a, b]$, y es C^1 salvo en a lo más un número finito de puntos.

Buscaremos condiciones necesarias para las soluciones de:

$$(P) \begin{cases} \min_y J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1, y \text{ es } C^1 \text{ salvo quizás en algún } c \in (a, b). \end{cases}$$

Obs.

- El valor de c es una variable del problema.
- Un extremal C^1 por pedazos se llama **extremal quebrado**.

Buscaremos un extremal quebrado solo en un punto c . Así, podemos descomponer nuestro funcional como

$$J(y) = J_1(y) + J_2(y) = \int_a^c L(x, y, y') dx + \int_c^b L(x, y, y') dx$$

y calcular $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2$.

El funcional J_1 tiene el extremo inicial $x = a$ fijo, pero el final $x = c$ es libre. Luego, su variación general será

$$\delta J_1 = \int_a^c (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) h dx + (L - y' L_{y'})|_{x=c^-} \Delta x + L_{y'}|_{x=c^-} \Delta y.$$

El funcional J_2 tiene libre el extremo inicial $x = c$ y fijo su extremo final $x = b$, por lo que la variación general está dada por

$$\delta J_2 = \int_c^b (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) h dx - (L - y' L_{y'})|_{x=c^+} \Delta x - L_{y'}|_{x=c^+} \Delta y.$$

Notemos que, como y es continua en $x = c$, las perturbaciones Δx y Δy en $x = c$ con las mismas para J_1 y J_2 .

De esta forma, estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado para extremos quebrados

Teorema 1.5.3 Las condiciones necesarias para una solución y de (P) con una esquina en $x = c$ son

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'} \text{ en } (a, c), \quad L_y = \frac{d}{dx} L_{y'} \text{ en } (c, b)$$

$$L_{y'}|_{x=c^-} = L_{y'}|_{x=c^+}, \quad (L - y' L_{y'})|_{x=c^-} = (L - y' L_{y'})|_{x=c^+}$$

Condiciones de Weirstrass-Erdmann

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1.$$

Demostración. De $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0$, encontramos:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_a^c (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) h dx + \int_c^b (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) h dx \\ &\quad + ((L - y' L_{y'})|_{x=c^-} - (L - y' L_{y'})|_{x=c^+}) \Delta x + (L_{y'}|_{x=c^-} - L_{y'}|_{x=c^+}) \Delta y = 0, \end{aligned}$$

para todo $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$ y para todo h de clase C^1 por pedazos tal que $h(a) = 0, h(b) = 0$.

En particular, si $\Delta x = \Delta y = 0, h \in C^1(a, b)$ con $h(x) = 0, \forall x \in [c, b]$ y $h(a) = h(c) = 0$, deducimos que (Lema 1.2.1)

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'} \text{ en } (a, c)$$

Si $\Delta x = \Delta y = 0, h \in C^1(a, b)$ con $h(x) = 0, \forall x \in [a, c]$ y $h(c) = h(b) = 0$, deducimos que (Lema 1.2.1)

$$L_y = \frac{d}{dx} L_{y'} \text{ en } (c, b).$$

Remplazando en la variación general, obtenemos

$$((L - y'L_{y'})|_{x=c^-} - (L - y'L_{y'})|_{x=c^+}) \Delta x + (L_{y'}|_{x=c^-} - L_{y'}|_{x=c^+}) \Delta y = 0, \forall \Delta x, \Delta y \in \mathbb{R},$$

de donde se deducen las **condiciones de Weirstrass-Erdmann**. ■

■ **Ejemplo 1.9**

$$\begin{cases} \min_y \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx \\ y(0) = 0, y(4) = 2, \text{ y teniendo a lo más una esquina.} \end{cases}$$

En este caso $L = (y' - 1)^2 (y' + 1)^2$ es solo función de y' , lo que implica

$$L_{y'} = C^{te}.$$

Esto nos dice que y' es constante en cada región, es decir

$$y(x) = \begin{cases} Ax + B, & x \in (0, c) \\ Cx + D, & x \in (c, 4). \end{cases}$$

Ejercicio 1.5 Determinar A, B, C, D y c con las condiciones de Weierstrass-Erdmann y de borde. ■

Ejercicio 1.6 Resolver si se permiten 2,3 ó N esquinas en la solución. ■

1.6 Variables y ecuaciones canónicas de Euler-Lagrange

Habíamos definido el *momentum* $L_{y'}$ y el *Hamiltoniano* $y'L_{y'} - L$.

Denotemos:

$$p(x) := L_{y'}(x, y, y') \quad \text{y} \quad H(x, y, y', p) := py' - L(x, y, y')$$

Si y es un extremal de $J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx$, entonces es solución de E-L.

Teorema 1.6.1 Si y es solución de E-L, entonces y es solución de función del Hamiltoniano:

$$y' = H_p, \quad p' = -H_y$$

Ecuaciones canónicas de Euler-Lagrange

Obs.

- Las variables y y p son llamadas **variables canónicas**.
- Estas ecs. también son llamadas **Ecuaciones canónicas de Hamilton** (1835)
- Si L no depende de y , entonces p es constante a lo largo del extremal.
- Si L no depende de x , entonces H es constante a lo largo del extremal.

1.6.1 Una interpretación física

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m :

- Posición descrita por $q(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \geq 0$.
- Bajo la acción de una fuerza F conservativa: $F = -\nabla U$.
- $U = U(q)$ es el potencial.

Las ecs. de movimiento de Newton:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = -\nabla U(q)$$

Pregunta: ¿Se podrán recuperar las ecuaciones de movimiento como un problema de optimización? En particular, ¿usando el Cálculo de Variaciones?

Sea $L = T - U$, donde

- $T := \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ (Energía cinética).
- $U = U(x, y, z)$ (Energía potencial).

Las ecuaciones de E-L para $J(x, y, z) = \int_0^T L dt = \int_0^T (T - U) dt$ (**Acción**) son:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = L_x, \quad \frac{d}{dt}L_{\dot{y}} = L_y, \quad \frac{d}{dt}L_{\dot{z}} = L_z$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -U_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -U_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -U_z$$

Obs.

- Las ecs. de movimiento de obtienen como extremales de J (**Principio de mínima acción** de Hamilton).
- $H = \dot{q} \cdot L_{\dot{q}} - L = m|\dot{q}|^2 - T + U = T + U = E$.

Ejercicio 1.7 Extender esta formulación a un sistema de n partículas. ■

1.7 Problemas isoperimétricos

Un problema relevante en el cálculo de variaciones es el denominado problema isoperimétrico, que consiste en maximizar el área encerrada por una curva, de largo dado. Un ejemplo de este tipo de problemas sería:

$$\begin{cases} \min_{y \in C^1} - \int_a^b y(x) dx \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \ell. \end{cases}$$

Este es conocido como el problema de *Dido*.

Veamos un marco general, consideremos los funcionales:

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad K(y) = \int_a^b G(x, y, y') dx.$$

Consideremos el siguiente problema **con restricción**:

$$(P_{ip}) \begin{cases} \min_{y \in C^1} J(y) \\ y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad K(y) = \ell. \end{cases}$$

Teorema 1.7.1 Si y es una solución de (P_{ip}) tal que **no es un extremal** de $K(y)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que y es un extremal de

$$\int_a^b (L(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')) dx$$

es decir, es solución de:

$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} - \lambda \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) = 0$$

λ : Es llamado *Multiplicador de Lagrange*.

Demostración. Sea $y(x)$ un mínimo local del (P_{ip}) , $\varepsilon > 0$ pequeño y consideremos una dirección factible, es decir, $h \in C_0^1(a, b)$ tal que,

$$K(y + th) = \ell = K(y), \quad \forall |t| < \varepsilon,$$

Por lo tanto

$$\delta K(y)[h] = 0.$$

Y dado que $y(x)$ es un mínimo local, tenemos que $\delta J(y)[h] \geq 0$.

Si consideramos el conjunto

$$W = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = \delta J(y)[h], v = \delta K(y)[h], \forall h \in C_0^1(a, b) \right\}.$$

Tenemos que W es un sub espacio vectorial de \mathbb{R}^2 , y $(-1, 0) \notin W$, pues si estuviese, existiría $h_0 \in C_0^1(a, b)$, tal que $-1 = \delta J(y)[h_0] < 0$ y $\delta K(y)[h_0] = 0$, con lo cual tendríamos que h_0 es una dirección de descenso para el problema y contradice, que $y(x)$ sea un mínimo local.

Con lo cual W no puede ser todo \mathbb{R}^2 , de esta forma existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tal que

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad \forall (u, v) \in W,$$

es decir,

$$\alpha \delta J(y)[h] + \beta \delta K(y)[h] = 0, \quad \forall h \in C_0^1(a, b).$$

Si $\alpha = 0$, tenemos que $\delta K(y)[h] = 0, \forall h \in C_0^1(a, b)$, lo cual no puede ser, pues $y(x)$ no es un extremal de K , con lo cual $\alpha \neq 0$, y denotando por $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, se obtiene el resultado. ■

Volvamos al ejemplo:

$$L = -y, \quad K = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

De esta forma, el nuevo Lagrangeano es

$$L' = -y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2},$$

y la ecuación de E-L corresponde a

$$-1 + \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0.$$

Integrando con respecto a x , obtenemos

$$-x + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C.$$

Despejando y' e integrando con respecto a x , podemos obtener

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x + C)^2} + D,$$

donde D es la constante de la integración. Así, obtenemos que y es solución de

$$(y - D)^2 + (x + C)^2 = \lambda^2,$$

es decir, una circunferencia de centro $(-C, D)$ y radio $|\lambda|$, los cuales es posible obtener mediante las condiciones en los extremos y el largo de la curva.

1.8 Condiciones de segundo orden

En esta parte, deduciremos condiciones necesarias y suficientes, de segundo orden para la existencia de soluciones de

$$(P) \begin{cases} \text{mín} & J(y) := \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx, \\ \text{s.a.} & y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \end{cases}$$

1.8.1 Segunda variación de un funcional

Para esto introduzcamos el concepto de segunda variación de un funcional J , definido en un e.v.n. Supongamos que

$$J(y + h) = J(y) + \varphi_1(y)[h] + \varphi_2(y)[h] + o(\|h\|^2),$$

donde

- $\varphi_1(y)[h]$ es un funcional lineal en h ($\delta J(y) = \varphi_1(y)$, es la variación de J).
- $\varphi_2(y)[h]$ es un funcional cuadrático en h , es decir, $\varphi_2(y)[h] = A(h, h)$, donde A es un funcional bilineal (llamaremos $\delta^2 J = \varphi_2$).
- $o(\|h\|^2)/\|h\|^2 \rightarrow 0$, cuando $\|h\| \rightarrow 0$.

Teorema 1.8.1 Si y es un mínimo (máximo) local de J , entonces $\delta^2 J(y)[h] \geq 0$ (≤ 0), para todo h admisible.

Ejercicio 1.8 Hacer la demostración. ■

Teorema 1.8.2 — Condición suficiente de segundo orden. Sea y tal que:

- $\delta J(y)[h] = 0, \forall h$ admisible.
 - $\exists k > 0$, tal que $\delta^2 J(y)[h] \geq k\|h\|^2, \forall h$ admisible.
- Entonces, y es un mínimo local de J .

Ejercicio 1.9 Hacer la demostración. ■

En nuestro caso, si definimos $\phi(t) = J(y + th)$, obtenemos

$$\phi'(t) = \int_a^b \left(L_y(x, y + th, y' + th')h + L_{y'}(x, y + th, y' + th')h' \right) dx,$$

$$\phi''(t) = \int_a^b \left(L_{yy}(x, y + th, y' + th')h^2 + 2L_{y'y}(x, y + th, y' + th')hh' + L_{y'y'}(x, y + th, y' + th')(h')^2 \right) dx,$$

$$\delta^2 J(y)[h] = \frac{1}{2}\phi''(0) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(L_{y'y'}|h'|^2 + 2L_{yy}hh' + L_{yy}|h|^2 \right) dx.$$

Integrando por partes y usando que $h(a) = h(b) = 0$, obtenemos

$$\delta^2 J(y)[h] = \frac{1}{2} \int_a^b \left(L_{y'y'}|h'|^2 + \left(L_{yy} - \frac{d}{dx}L_{yy'} \right)|h|^2 \right) dx,$$

con lo cual, si definimos $P = \frac{1}{2}L_{y'y'}$ y $Q = \frac{1}{2}(L_{yy} - \frac{d}{dx}L_{yy'})$, obtenemos la fórmula de la segunda variación:

$$\delta^2 J(y)[h] = \int_a^b (P|h'|^2 + Q|h|^2) dx.$$

1.8.2 Condición necesaria para extremos de J

Lema 1.8.3 Si $\int_a^b (P|h'|^2 + Q|h|^2) dx \geq 0$, para todo $h \in C_0^1(a, b)$, entonces $P(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$.

Demostración. Por contradicción: supongamos que $\exists c \in (a, b)$, tal que $P(c) < 0$. Por conveniencia, supondremos que $P(c) = -2\beta$, para algún $\beta > 0$. Como $P \in C(a, b)$, $\exists \alpha > 0$ tal que

$$P(x) < -\beta, \quad \forall x \in (c - \alpha, c + \alpha).$$

Sea $\varepsilon \in (0, 1)$, y consideremos

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \text{sen}^2 \left(\frac{\pi(x-c)}{\varepsilon\alpha} \right), & x \in (c - \varepsilon\alpha, c + \varepsilon\alpha) \\ 0, & \sim \end{cases}$$

Ejercicio 1.10 Verificar que $h_\varepsilon \in C^1(a, b)$ y $h_\varepsilon(a) = h_\varepsilon(b) = 0$. ■

De esta forma, reemplazando h_ε en la segunda variación, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (P|h'_\varepsilon|^2 + Q|h_\varepsilon|^2) dx \\ &= \int_{c-\varepsilon\alpha}^{c+\varepsilon\alpha} \left(P(x) \frac{\pi^2}{\varepsilon^2\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi(x-c)}{\varepsilon\alpha} \right) + Q(x) \operatorname{sen}^4 \left(\frac{\pi(x-c)}{\varepsilon\alpha} \right) \right) dx \\ &\leq -\beta \frac{\pi^2}{\varepsilon^2\alpha^2} \int_{c-\varepsilon\alpha}^{c+\varepsilon\alpha} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi(x-c)}{\varepsilon\alpha} \right) dx + 2\varepsilon\alpha \|Q\|_{L^\infty} \\ &= -\beta \frac{\pi^2}{\varepsilon^2\alpha^2} \varepsilon\alpha \int_{-1}^1 \operatorname{sen}^2(2\pi y) dy + 2\varepsilon\alpha \|Q\|_{L^\infty} \\ &= -\beta \frac{\pi^2}{\varepsilon\alpha} + 2\varepsilon\alpha \|Q\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, dado que si tomamos ε suficientemente pequeño, obtendremos $-\beta \frac{\pi^2}{\varepsilon\alpha} + 2\varepsilon\alpha \|Q\|_{L^\infty} < 0$. ■

Con el Lema 1.8.3, deducimos el siguiente resultado

Teorema 1.8.4 — Condición necesaria de Legendre. Si $y(x)$ es un mínimo local de J , entonces

$$L_{y'y'} \geq 0, \quad \text{en cada punto de la curva } y(x).$$

Obs. Pregunta natural: ¿Será $L_{y'y'} > 0$ una condición suficiente para mínimo de J ?

Ejercicio 1.11 Obtenga un extremo y verifique si se cumple la *condición de Legendre*

1. $J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + |y'|^2} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$
2. $J(y) = \int_0^1 (2 - 3y|y'|^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

1.8.3 Ecuación de Jacobi y puntos conjugados

Es natural suponer que una condición suficiente para mínimos de J , es $L_{y'y'} > 0$, pues podríamos pensar que esto implica que $\delta^2 J$ sea definido positivo.

■ **Ejemplo 1.10** Consideremos el siguiente funcional a minimizar

$$J(y) = \int_0^{2\pi} (|y'|^2 - y^2) dx,$$

con las condiciones de borde $y(0) = 0, y(2\pi) = 0$.

De la ecuación de E-L obtenemos: $y'' + y = 0$

$$\implies y(x) = A \sin(x), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, obtenemos que

$$L_{y'y'} = 2 > 0,$$

y

$$J(\text{Asen}(x)) = A^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)) dx = A^2 \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = 0.$$

Pero $J\left(x - \frac{x^2}{2\pi}\right) < 0$ (ejercicio). Es decir, la condición de Legendre es sólo necesaria. Más aún, $L_{y'y'} > 0$ no es suficiente. ■

La idea es buscar condiciones para que $\delta^2 J(h)$ sea definido positivo:

$$\delta^2 J(h) > 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, h(b) = 0, h \neq 0.$$

Asumiremos la condición “natural”: $L_{y'y'} > 0$ en $[a, b]$.

Recordemos que

$$\delta^2 J(h) = \int_a^b (P(h')^2 + Qh^2) dx,$$

donde $P = \frac{1}{2}L_{y'y'}$, $Q = \frac{1}{2}(L_{yy} - \frac{d}{dx}L_{yy'})$ y $h \in C^1(a, b)$ tal que $h(a) = 0 = h(b)$.

Notemos que para cualquier $w \in C^1(a, b)$ tenemos:

$$0 = \int_a^b \frac{d}{dx}(wh^2) dx = \int_a^b (w'h^2 + 2whh') dx.$$

Entonces:

$$\delta^2 J(h) = \int_a^b (P(h')^2 + Qh^2) dx = \int_a^b (P(h')^2 + 2whh' + (Q + w')h^2) dx$$

Si w es solución de $P(Q + w') = w^2$:

$$\delta^2 J(h) = \int_a^b P\left(h' + \frac{wh}{P}\right)^2 dx \geq 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, h(b) = 0.$$

Con lo cual tenemos

Lema 1.8.5 Si $P(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ y existe $w \in C^1(a, b)$ solución de la ecuación de Riccati

$$P(Q + w') = w^2 \quad (R)$$

en todo $[a, b]$. Entonces $\delta^2 J$ es definido positivo.

Demostración. Dado que existe w solución de (R) , obtenemos que $\delta^2 J(h) \geq 0$, pues como se vio antes se tiene

$$\delta^2 J(h) = \int_a^b P\left(h' + \frac{wh}{P}\right)^2 dx \geq 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, h(b) = 0.$$

Lo que nos falta verificar es que es estrictamente positivo, salvo si $h \equiv 0$. Supongamos que $\delta^2 J(h) = 0$, lo que implica que $h' + \frac{wh}{P} = 0$. Como $h(a) = 0$, entonces $h \equiv 0$, lo cual nos dice que

$$\delta^2 J(h) > 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, h(b) = 0, h \neq 0. \quad \blacksquare$$

Obs. Puede pasar que (R) **no admita** solución en todo el intervalo $[a, b]$.

■ **Ejemplo 1.11** Consideremos $P = 1$ y $Q = -1$. En este caso, (R) corresponde a $w' = w^2 + 1$, cuya solución está dada por $w(x) = \tan(x - c)$, la cual explota si $b - a \geq \pi$. ■

¿Cómo aseguramos que (R) tenga solución en $[a, b]$?

Si consideramos un cambio de variable $w = -\frac{Pu'}{u}$ en (R) , obtenemos que la nueva variable u , es solución de

$$\boxed{-(Pu')' + Qu = 0} \quad (J)$$

La igualdad (J) se conoce como la **ecuación de Jacobi** asociada a $J(y)$.

Conclusión: Si (J) admite una solución u tal que $u(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$, entonces (R) tendrá solución en $[a, b]$.

Con lo anterior tenemos

Lema 1.8.6 Si $P(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ y existe una solución de la ecuación de Jacobi $u(x)$ que no se anule en $[a, b]$. Entonces $\delta^2 J$, es definido positivo.

El análisis anterior motiva la siguiente

Definición 1.8.1 $d \neq c$ se dice **conjugado a c** con respecto a $J(y)$, si la ecuación de Jacobi (J) tiene una solución $u \neq 0$ tal que $u(c) = 0 = u(d)$.

Con esta definición, probaremos el siguiente resultado

Lema 1.8.7 Si $[a, b]$ no tiene conjugados a a , entonces la ecuación (J) admite una solución $u(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

Demostración. Consideremos u_ε la solución de

$$-(Pu'_\varepsilon)' + Qu_\varepsilon = 0,$$

con condiciones iniciales $u_\varepsilon(a) = \varepsilon$ y $u'_\varepsilon(a) = 1$. Dado que a no tiene conjugados en $[a, b]$ (notar que $u_0(a) = 0, u'_0(a) = 1$), esto implica que $u_0(x) > 0, \forall x \in (a, b]$. Utilizando la continuidad de las soluciones de (J) con respecto a la condición inicial, concluimos que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $u_\varepsilon(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. ■

Como conclusión del Lema 1.8.7 anterior, obtenemos

Lema 1.8.8 Si $P(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ y el intervalo $[a, b]$ no tiene conjugados al punto a con respecto a la ecuación de Jacobi, entonces $\delta^2 J$ es definido positivo.

Sin embargo, el hecho de que $\delta^2 J$ sea definido positivo no es suficiente para asegurar que un extremal es mínimo de J .

1.8.4 Condiciones suficientes para extremos de J

Determinaremos condiciones suficientes para que un extremal del problema

$$(P) \begin{cases} \min_{y \in C^1} J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx \\ y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \end{cases}$$

sea solución.

Primero consideraremos el siguiente resultado

Lema 1.8.9 Si $P(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ y el intervalo $[a, b]$ no contiene conjugados a a , entonces existe $c > 0$ tal que

$$\int_a^b (P(h')^2 + Qh^2) dx \geq c \int_a^b (h')^2 dx \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, h(b) = 0.$$



- De hecho, probaremos que la desigualdad es estricta si $h \neq 0$.

Demostración. Vamos a demostrar que el funcional cuadrático

$$K(h) := \int_a^b \left((P - \alpha)(h')^2 + Qh^2 \right) dx,$$

es definido positivo para algún $0 < \alpha < 1$ constante. Verifiquemos que K cumple las hipótesis del Lema 1.8.8.

- Tomamos $\alpha > 0$ tal que $P - \alpha > 0$ en $[a, b]$. Basta escoger $\alpha < \frac{1}{2} \min_{x \in [a, b]} P(x)$.
- Debemos verificar que $-((P - \alpha)u')' + Qu = 0$ admite una solución $u \neq 0$ en $[a, b]$. Esta ecuación es la ecuación de Jacobi asociada a $K(h)$. Como $[a, b]$ no tiene conjugados a a , por el Lema de la clase anterior

$$-(Pu')' + Qu = 0,$$

tiene una solución $u > 0$ en $[a, b]$. De esta forma si α es suficientemente pequeño, entonces por continuidad de las soluciones de la ecuación de Jacobi con respecto a los parámetros (en este caso con respecto a P), podemos garantizar que existe una solución u de la ecuación de Jacobi asociada a $K(h)$ tal que $u > 0$ en $[a, b]$.

Así, por el Lema 1.8.8 concluimos que $K(h) > 0$. Lo que concluye el resultado. ■

Ahora estamos en posición de probar el resultado principal:

Teorema 1.8.10 — Condiciones suficientes para mínimos locales. Sea $y(x)$ admisible para el problema (P) , tal que:

- $y(x)$, es un extremal, es decir, es solución de $L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} = 0$.
- $L_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0, \forall x \in [a, b]$ (condición de Legendre).
- El intervalo $[a, b]$ no tiene conjugados de a (con respecto a la ecuación de Jacobi asociada).

Entonces $y(x)$ es un mínimo local de J .

Demostración. Dado $h \in C^1(a, b)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, debemos probar que

$$\Delta J := J(y + th) - J(y) > 0, \quad \forall |t| < 1.$$

Consideremos $\phi(t) := J(y + th)$. Tenemos

$$\Delta J = \phi'(0)t + \frac{1}{2}\phi''(0)t^2 + o(t^2).$$

Sabemos que $\phi'(0) = 0$, pues son las condiciones de primer orden (E-L).

El error está dado por $o(t^2) = \frac{\phi'''(\bar{t})}{6}t^3$, donde $\bar{t} \in (0, t)$. Veamos la tercera derivada de ϕ :

$$\phi'''(t) = \int_a^b \left(L_{yyy}h^3 + 3L_{y'yy}h'h^2 + 3L_{yy'y'}h(h')^2 + L_{y'y'y'}(h')^3 \right),$$

de donde podemos obtener

$$o(t^2) = t^2 \int_a^b (\bar{P}(x, \bar{t}, t)(h')^2 + \bar{Q}(x, \bar{t}, t)h^2) dx,$$

donde $\bar{P}, \bar{Q} \rightarrow 0$ uniformemente cuando $t \rightarrow 0$, y obtenemos

$$\Delta J = t^2 \int_a^b (P|h'|^2 + Q|h|^2) dx + t^2 \int_a^b (\bar{P}h^2 + \bar{Q}(h')^2) dx,$$

donde $P = \frac{1}{2}L_{y'y'}$ y $Q = \frac{1}{2}(L_{yy} - \frac{d}{dx}L_{yy'})$. Usando la desigualdad de Poincaré en h o, de forma más explícita,

$$\begin{aligned} \int_a^b h^2 dx &= \int_a^b \left(\int_a^x h'(s) ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^x 1 dt \int_a^x (h'(s))^2 ds dx \\ &\leq \int_a^b (x-a) \int_a^b (h'(s))^2 ds dx \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (h'(x))^2 dx, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\frac{\Delta J}{t^2} \geq \int_a^b (P|h'|^2 + Q|h|^2) dx - \left(\|\bar{P}\|_\infty + \frac{(b-a)^2}{2} \|\bar{Q}\|_\infty \right) \int_a^b |h'|^2 dx.$$

Si denotamos por $\varepsilon = \|\bar{P}\|_\infty + \frac{(b-a)^2}{2} \|\bar{Q}\|_\infty$ y usando el Lema 1.8.9 podemos observar:

$$\frac{\Delta J}{t^2} \geq (c - \varepsilon) \int_a^b |h'|^2 dx,$$

con $c > 0$. Notamos que $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, por lo que para t suficientemente pequeño podemos garantizar que

$$J(y + th) > J(y),$$

lo que concluye la demostración. ■

■ **Ejemplo 1.12** Volvamos al Ejemplo 1.10:

$$J(y) = \int_0^{2\pi} (|y'|^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$$

$$\text{Sea } J_a(y) = \int_0^a (|y'|^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

$$L_{y'y'} = 2 > 0$$

y los extremales son de la forma

$$y(x) = A \sin(x) + B \cos(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

¿Para qué valores de $a > 0$ podemos asegurar que un extremal sea un mínimo de J_a ?

En este caso la ecuación de E-L es $y'' + y = 0$. Por otro lado, como $P = 1$ y $Q = -1$, la ecuación de Jacobi asociada a J es

$$u'' + u = 0.$$

Si consideramos condiciones iniciales $u(0) = 0$ y $u'(0) = 1$, obtenemos como solución $u(x) = \sin(x)$, la cual no se anula en $(0, a]$ si $a < \pi$ ($[0, a]$ no contiene conjugados a 0 si $a < \pi$). Con esta condición, si resolvemos la ecuación de E-L con las condiciones de borde, por el Teorema 1.8.10 obtenemos que $y \equiv 0$ es un mínimo local de J_a . ■

Ejercicio 1.12 Verifique que si escoge $y(x) = x(a-x)$, entonces $J_a(y) > 0$ si $a < \pi$. ■

Obs. Algunas observaciones

- La ecuación de Jacobi asociada a $J(y)$:

$$-(Pu')' + Qu = 0$$

corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange de $\delta^2 J(h)$. Sin embargo, nuestro análisis no busca los extremos (ni extremales) de $\delta^2 J(h)$.

- Vimos que la ausencia de conjugados a a en el intervalo $[a, b]$ es una condición **suficiente** para que $\delta^2 J(h)$ sea definido positivo. De hecho, es también una condición **necesaria**:

Teorema 1.8.11 Si $P(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b (P(h')^2 + Qh^2) dx > 0, \quad \forall h \in C^1(a, b), h(a) = 0, h(b) = 0, h \not\equiv 0.$$

($\delta^2 J(h)$ es definido positivo) **si y sólo si** el intervalo $[a, b]$ no contiene conjugados a a .

2. Control y Estabilización de Sistemas Lineales

2.1 Controlabilidad

Consideremos el sistema lineal

$$(L) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde

- $A \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $B \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}^{n \times m})$.
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema.
- x_0 es la condición inicial.
- $u \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}^m)$, es el control ($m \leq n$).

En general podríamos considerar $U \subset \mathbb{R}^m$ y $u \in L^\infty(0, T, U)$.

Una solución de (L) es una función continua $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (A(s)x(s) + B(s)u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, t].$$

Obs. Bajo nuestros supuestos (L) tiene una única solución. Por supuesto, la solución de (L) depende de u , por ello, la anotaremos como $x_u(t)$ cuando sea necesario marcar esta dependencia.

Definición 2.1.1 — Controlabilidad. El sistema lineal (L) es controlable (en tiempo T) si para todo $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}^m)$, tal que la solución $x_u(t)$ de (L) asociada a u satisface $x_u(0) = x_0$ y $x_u(T) = x_1$.

Otra forma de ver la controlabilidad es definiendo el conjunto de los alcanzables o accesibles desde x_0 en tiempo T , es decir

$$\text{Acc}_U(x_0, T) := \left\{ x_u(T) \mid \begin{array}{l} x_u \text{ solución de } (L) \text{ con condición inicial } x_0 \\ \text{y control } u \in L^\infty(0, T, U) \end{array} \right\}.$$

De esta forma, (L) es controlable $\Leftrightarrow \text{Acc}(y_0, T) = \mathbb{R}^n$.

Recuerdo:

Utilizando la fórmula de variación de parámetros, podemos caracterizar a la solución de (L) como

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds,$$

donde $R = R(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la **matriz resolvente** del sistema homogéneo $x' = A(t)x$:

$$\begin{cases} R'(t) = A(t)R(t), & t \in [0, T], \\ R(0) = I_{n \times n}. \end{cases}$$

Obs. Si A es constante, entonces $R(t) = e^{tA} := \sum_{i \geq 0} \frac{t^i}{i!} A^i$.

2.2 Caso autónomo

En este caso, consideraremos que A y B son matrices independientes del tiempo. Por lo tanto $R(t) = e^{At}$ y

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt.$$

Lema 2.2.1 El sistema (L) será controlable si y sólo si

$$\begin{aligned} \Phi : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \Phi(u) = \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

Demostración. En efecto si Φ es sobreyectiva, dados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\Phi(u) = x_1 - R(T)x_0,$$

lo que implica

$$x(T) = R(T)x_0 + \Phi(u) = x_1,$$

y por tanto (L) es controlable.

Sea $y \in \mathbb{R}^n$. Si (L) es controlable, existe u tal que con $x(0) = 0$ y $x_1 = y$, se tiene

$$y = x(T) = R(T)0 + \Phi(u),$$

lo que implica que Φ es sobreyectiva. ■

Gracias al Lema 2.2.1, debemos buscar condiciones sobre A y B para que Φ sea sobreyectiva. Para continuar necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.2 — Cayley-Hamilton. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Entonces $p_A(A) = 0$, donde $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ es el polinomio característico de A .

Demostración. La demostración de este resultado escapa a los alcances de este curso, de todas formas ofrecemos una descripción de los pasos a seguir para poder probarlo utilizando herramientas del análisis complejo:

- Primero, hay que probar que si $|z| = r > \|A\|$, entonces

$$(zI - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{z^{k+1}}.$$

y esta convergencia es uniforme.

- Luego debemos probar

$$A^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} z^k (zI - A)^{-1} dz.$$

- Concluir que

$$p_A(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} p_A(z) (zI - A)^{-1} dz.$$

- Demostrar que existe una matriz $B(z)$, tal que $(zI - A)B(z) = p_A(z)I$, donde $B(z)$ tiene coeficientes que son polinomios en z .
- Concluir que

$$p_A(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} B(z) dz = 0.$$

■

Para encontrar las condiciones sobre A y B para que Φ sea sobreyectiva, hagamos un cálculo formal:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_0^T e^{(T-t)A} Bu(t) dt \\ &= \int_0^T \sum_{i \geq 0} \frac{(T-t)^i}{i!} A^i Bu(t) dt \\ &= \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(T-t)^i}{i!} A^i Bu(t) + \sum_{i \geq n} \frac{(T-t)^i}{i!} A^i Bu(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Utilizando el Teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que existen coeficientes $\{a_i\}_{i=0}^{n-1} \subset \mathbb{R}$, tal que

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I_n,$$

y así podemos observar que existen funciones $\alpha_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 0, \dots, n-1$, tal que

$$\Phi(u) = \int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(T-t) A^i Bu(t) dt.$$

Esto nos da la idea de que $\Phi(u)$ será sobreyectiva si $\{A^i Bu\}_{i=0}^{n-1}$ genera \mathbb{R}^n .

Lema 2.2.3 Sea $C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]_{n, mn}$.

Φ es sobreyectiva $\iff \text{rg}(C) = n$ (rango de C).

Demostración. Veamos primero una implicancia.

Supongamos que Φ es sobreyectiva. Si $\text{rg}(C) < n$, entonces $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$v^{tr}C = 0$$

$$\implies v^{tr}B = 0, v^{tr}AB = 0, v^{tr}A^2B = 0, \dots, v^{tr}A^{n-1}B = 0.$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton obtenemos que $A^n = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I$, de donde se tiene

$$v^{tr}A^nB = 0.$$

Inductivamente, se prueba que

$$v^{tr}A^k B = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo que implica

$$v^{tr}e^{(T-t)A}B = \sum_{k \geq 0} \frac{(T-t)^k}{k!} v^{tr}A^k B = 0.$$

De esta forma, obtenemos que $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$v^{tr}\Phi(u) = 0, \quad \forall u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m),$$

es decir, Φ no es sobreyectiva.

Veamos la otra implicancia. Ahora supongamos que Φ no es sobreyectiva. Esto quiere decir que $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$v^{tr}\Phi(u) = 0, \quad \forall u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Tomando $u = B^T e^{(T-t)A^T} v$, obtenemos

$$\int_0^T \left| v^{tr}e^{(T-t)A}B \right|^2 dt = 0,$$

lo que implica que la función $\varphi(t) := v^{tr}e^{(T-t)A}B = 0$, para todo $t \in [0, T]$. Al evaluar en $t = T$, obtenemos

$$\varphi(T) = v^{tr}B = 0.$$

Más aún, derivando con respecto a t y evaluando en $t = T$:

$$\varphi'(T) = v^{tr}AB = 0$$

$$\varphi''(T) = v^{tr}A^2B = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(k)}(T) = v^{tr}A^k B = 0, \quad \forall k \geq 0,$$

de donde deducimos que $v^{tr}C = 0$ y, por lo tanto, $\text{rg}(C) < n$. ■

Obs.

- $C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]_{n,mn}$: **Matriz de Kalman**.
- $\text{rg}(C) = n$: **Condición de Kalman**.
- La condición de Kalman es **independiente** de T , x_0 y x_1 .

Teorema 2.2.4 — Condición de Kalman. Sea $C = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]$.
El sistema (L) es controlable si sólo si $\text{rang}(C) = n$.

Obs. El control en general no es único.

■ **Ejemplo 2.1** Oscilador armónico lineal. Considere el sistema

$$\ddot{x} + \beta^2 x = u(t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1.$$

¿Existe u tal que $x(T) = \dot{x}(T) = 0$?

Comenzaremos por transformar el problema a un sistema,

$$\begin{aligned} y &= x', \\ y' &= x'' = -\beta^2 x + u, \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Así, las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto la matriz de Kalman asociada es

$$C = [B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(C) = 2, \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto el sistema es controlable para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Consideremos el caso amortiguado, es decir, $\ddot{x} + \beta^2 x + \alpha \dot{x} = u(t)$. Visto como sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

y por lo tanto, las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & -\alpha \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con lo cual la matriz de Kalman asociada es

$$C = [B|AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \implies \text{rg}(C) = 2.$$

Por lo tanto, el sistema es controlable para todo β y α .

■

Ejercicio 2.1 Sistema de resortes acoplados (tren con dos vagones):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + k_1x &= k_2(y - x) \\ \ddot{y} + k_2y &= k_2x + u\end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre k_1, k_2 para que el sistema sea controlable. ■

2.3 Caso no autónomo

Consideremos el sistema lineal:

$$(L) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Sea $R(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, la matriz resolvente del sistema homogéneo $x' = Ax$, es decir, la solución de

$$\begin{cases} R'(t) = A(t)R(t), & t \in (0, T) \\ R(0) = Id \end{cases}$$

- La resolvente $R(t)$ es invertible para todo t , en efecto si denotamos por $w(t) = \det(R(t))$, $w(t)$ es solución de la ecuación homogénea

$$\begin{cases} w'(t) = \text{tr}(A(t))w(t), & t \in (0, T) \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

- R^{-1} , es la única solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} (R^{-1})'(t) = -R^{-1}(t)A(t), & t \in (0, T) \\ R^{-1}(0) = Id \end{cases}$$

- La solución $x(t)$ del sistema (L) se escribe como

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds.$$

De esta forma si definimos la aplicación

$$\begin{aligned}\phi : L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \phi(u) = \int_0^T R(T)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds\end{aligned}$$

tenemos que $x(T) = R(T)x_0 + \phi(u)$, de lo cual tenemos

Lema 2.3.1 La controlabilidad del sistema (L) es equivalente a la sobreyectividad de la aplicación ϕ .

Ejercicio 2.2 Hacer la demostración del Lema 2.3.1. ■

Si consideramos la aplicación

$$\begin{aligned}\phi^* : \mathbb{R}^n &\rightarrow L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m) \\ y &\rightarrow \phi^*(y)(s) = B^{tr}(s)R^{-tr}(s)R^{tr}(T)y\end{aligned}$$

tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.3.2 El sistema (L) es controlable si, y sólo si, la aplicación lineal $\phi \circ \phi^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva.

Demostración. Sabemos del Lema 2.3.1 que el sistema (L) es controlable si, y sólo si, la aplicación lineal ϕ es sobreyectiva. Primero observemos la relación que existe entre ϕ y ϕ^* . Es fácil ver que

$$\langle \phi(u), y \rangle = y^{tr} \cdot \phi(u) = \int_0^T u(s) \cdot \phi^*(y)(s) ds, \quad \forall u \in L^2(0, T), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora veamos que si ϕ es sobreyectivo si, y sólo si, ϕ^* es inyectivo. Para ver esto, lo haremos por contra-recíproca. Supongamos que ϕ no es sobreyectiva, es decir, existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $y \perp \text{Im}(\phi)$:

$$\forall u \in L^\infty(0, T), \quad 0 = \langle y, \phi(u) \rangle = \int_0^T u(s) \cdot \phi^*(y)(s) ds,$$

lo cual es equivalente a decir que $\phi^*(y) = 0$, es decir $y \in \text{Ker}(\phi^*)$. Lo que hemos probado es que

$$(\text{Im}(\phi))^\perp = \text{Ker}(\phi^*).$$

Ahora veremos que ϕ es sobreyectivo si, y sólo si, $\phi \circ \phi^*$ es sobreyectivo. Claramente si $\phi \circ \phi^*$ es sobreyectivo, entonces ϕ es sobreyectivo.

Veamos la otra implicancia, por contra-recíproca, si $\phi \circ \phi^*$ no es sobreyectiva, entonces existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $y \perp \text{Im}(\phi \circ \phi^*)$, es decir

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \quad 0 = \langle y, (\phi \circ \phi^*)(z) \rangle = \int_0^T \phi^*(y)(s) \cdot \phi^*(z)(s) ds.$$

Ahora, tomamos $z = y$ para obtener

$$\int_0^T |\phi^*(y)(s)|^2 ds = 0,$$

lo cual implica que $y \in \text{Ker}(\phi^*) = (\text{Im}(\phi))^\perp$, por lo tanto ϕ no es sobreyectivo. Lo cual concluye la demostración. ■

Un calculo directo, permite ver que si denotamos por $Gy = (\phi \circ \phi^*)(y)$, la matriz representante de la aplicación lineal, obtenemos

$$G = \int_0^T R(T)R^{-1}(s)B(s)B^{tr}(s)R^{-tr}(s)R^{tr}(T)ds,$$

y podemos ver que al tomar el control $u = \phi^*(y)$, para que el sistema sea controlable, necesitamos que

$$Gy = x_1 - R(T)x_0,$$

donde x_0 y x_1 son el estado inicial y final del sistema, respectivamente.

Dado que G es una matriz de $n \times n$, por el Teorema del núcleo imagen, ver que la aplicación es sobreyectiva es equivalente a ver que la matriz es invertible.

Teorema 2.3.3 El sistema no autónomo $x' = A(t)x + B(t)u$ es controlable en tiempo T si y sólo si la matriz

$$C(T) = \int_0^T R(t)^{-1} B(t) B(t)^{tr} R(t)^{-tr} dt$$

es invertible.

Demostración. Basta observar que

$$G = R(T)C(T)R^{tr}(T),$$

y notar que $R(T)$ es invertible. ■

Obs.

- $C(T)$ es llamada **Matriz de Controlabilidad o Matriz Gramiana**.
- $C(T)$ es simétrica y semi-definida positiva.
- $C(T)$ depende de T , pero es independiente de x_0 y x_1 .

Teorema 2.3.4 Si $C(T)$ es invertible, entonces el control asociado

$$u^*(s) = B^{tr}(s)R^{-tr}(s)C(T)^{-1}R^{-1}(T)(x_1 - R(T)x_0)$$

es el control de norma $L^2(0, T)$ mínima.

Demostración. Considere que existe otro control u , que lleva al estado x_0 a x_1 en tiempo T , es decir

$$x_1 = R(T)x_0 + \phi(u),$$

y denotemos por $y = G^{-1}(x_1 - R(T)x_0)$. Por construcción, $u^* = \phi^*(y)$. De esta forma obtenemos

$$Gy = x_1 - R(T)x_0 = \phi(u),$$

y al multiplicar por y , obtenemos

$$y^{tr}Gy = \langle \phi(u), y \rangle = \int_0^T u(s) \cdot \phi^*(y)(s) ds = \int_0^T u(s) \cdot u^*(s) ds,$$

por otra parte $y^{tr}Gy = y^{tr}\phi(\phi^*) = \int_0^T |\phi^*(y)(s)|^2 ds = \|u^*\|_{L^2}^2$. De esta forma, obtenemos

$$\|u^*\|_{L^2}^2 \leq \int_0^T u(s) \cdot u^*(s) ds.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se concluye el resultado. ■

Ejercicio 2.3 Considere:

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ y' &= x + tu. \end{aligned}$$

¿Es controlable este sistema? ■

En general es difícil calcular la matriz de Gramiana en el caso no autónomo. Por ello veremos otro criterio de controlabilidad.

Consideremos el sistema lineal no autónomo

$$(L) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Supongamos $A \in C^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$, $B \in C^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times m})$ y definamos una familia $\{B_i(t)\}_{i \geq 0} \subset C^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times m})$ como

$$\begin{aligned} B_0(t) &:= B(t), \\ B_i(t) &:= B'_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.5 Sean $A \in C^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$, $B \in C^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times m})$. Si existe $\bar{t} \in [0, T]$ tal que

$$\langle B_i(\bar{t})u / u \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N} \rangle = \mathbb{R}^n,$$

entonces el sistema (L) es controlable en tiempo T .

Demostración. Supongamos que el sistema (L) no es controlable. Entonces, $C(T)$ no es invertible, lo que implica que existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que

$$y^{tr}C(T)y = 0,$$

de donde

$$\int_0^T |y^{tr}R^{-1}(s)B(s)|^2 ds = 0.$$

Por lo tanto,

$$y^{tr}R^{-1}(t)B(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.1)$$

pues $A, B \in C^\infty$.

Ejercicio 2.4 Demuestre

$$\frac{d}{dt}R^{-1}(t) = -R^{-1}(t)A(t). \quad (2.2)$$

De esta forma, si derivamos con respecto a t la ecuación (2.1) y utilizando (2.2), obtenemos

$$0 = y^{tr}R^{-1}(t)(B'(t) - A(t)B(t)) = y^{tr}R^{-1}(t)B_1(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Nuevamente derivando esta última expresión tenemos

$$0 = y^{tr}R^{-1}(t)(B'_1(t) - A(t)B_1(t)) = y^{tr}R^{-1}(t)B_2(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Por lo tanto, inductivamente, podemos resumir que existe $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que

$$y^{tr}R^{-1}(t)B_i(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} B_0(t) &:= B(t), \\ B_i(t) &:= B'_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

La ecuación (2.3) nos dice que $R^{-tr}(t)y \perp B_i(t)$ donde $R^{-tr}(t)y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Así, tenemos

$$\text{rg}([B_0(t), B_1(t), B_2(t), \dots]) < n, \quad \forall t \in [0, T],$$

o puesto en otra forma

$$\langle B_i(t)u / u \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N} \rangle \neq \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, T].$$

Lo que concluye la demostración. ■

Obs. La condición anterior no es necesaria (salvo si $n = 1$)

■ **Ejemplo 2.2** Consideremos el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} u,$$

donde $f, g \in C^\infty(0, T)$ son tales que:

- $f(t) > 0, t \in [0, T/2]$ y $f(t) = 0, t \in [T/2, T]$.
- $g(t) = 0, t \in [0, T/2]$ y $g(t) > 0, t \in (T/2, T]$.

En este caso los operadores asociados al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad B(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

por lo tanto $R(t) = e^{tA} = I_n$. La matriz Gramiana asociada al sistema es

$$\begin{aligned} C(T) &= \int_0^T R^{-1}(t)B(t)B^{tr}(t)R^{-tr}(t) dt = \int_0^T I_n B(t)B^{tr}(t)I_n dt \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} f^2(t) & f(t)g(t) \\ f(t)g(t) & g^2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^T f^2(t) dt & 0 \\ 0 & \int_0^T g^2(t) dt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto $C(T)$ es invertible y en consecuencia el sistema (L) es controlable.

En este caso

$$B_i(t) = B'_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t) = B'_{i-1}(t),$$

lo que implica

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} f^{(i)}(t) \\ g^{(i)}(t) \end{pmatrix}.$$

Ahora, si $t \in [0, T/2]$,

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} f^{(i)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{lo que genera } \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Si $t \in [T/2, T]$,

$$B_i(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g^{(i)}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{lo que genera } \{0\} \times \mathbb{R}.$$

De esta forma

$$\forall t \in [0, T], \quad \langle B_i(t)u / u \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N} \rangle \neq \mathbb{R}^2.$$

■

Obs. Si $\langle B_i(0)u / u \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N} \rangle = \mathbb{R}^n$, entonces el sistema (L) es controlable en todo $T > 0$.

Ejercicio 2.5 Considere el sistema $x' = A(t)x + B(t)u$, donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es controlable este sistema en algún tiempo T ?

■

2.4 Observabilidad y dualidad

Consideremos el sistema lineal (autónomo)

$$(L) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Supongamos que podemos observar el vector

$$y(t) = Cx(t), \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (p < n),$$

el cual se interpreta como *observaciones* o *mediciones* del estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

El **problema de la observabilidad** consiste en distinguir el estado $x(t)$ del sistema a partir de experiencias de tipo entrada-salida. Esto es, conociendo $y(t)$, $\forall t \in [0, T]$, ¿podemos conocer x_0 ?

Notación: $(x_u(t, x_0), y_u(t, x_0))$ la solución de $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ tal que $x_u(0, u) = x_0$.

Definición 2.4.1 El sistema

$$(Obs) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

se dice **observable** (en tiempo T) si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq x_2 \implies \exists u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m), y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2).$$

Obs.

- Si la condición anterior se cumple, se dice que x_1 y x_2 son **distinguibles**.
- El sistema es observable si:

$$\forall u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m), y_u(\cdot, x_1) \equiv y_u(\cdot, x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- Notemos que

$$y_u(t, x_0) = Ce^{tA}x_0 + C \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

El siguiente resultado, nos entrega una condición suficiente y necesaria para la observabilidad.

Teorema 2.4.1 El sistema

$$(Obs) \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

se dice **observable** (en tiempo T) si y sólo si

$$\text{rg} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{pn \times n} \right) = n.$$

Demostración. Supongamos que el sistema (Obs) no es observable:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m), y_u(\cdot, x_1) \equiv y_u(\cdot, x_2) \wedge x_1 \neq x_2.$$

Entonces,

$$Ce^{tA}x_1 + C \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds = Ce^{tA}x_2 + C \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

de donde

$$Ce^{tA}(x_1 - x_2) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

con $x_1 - x_2 \neq 0$. Derivando con respecto a t :

$$Ce^{tA}A(x_1 - x_2) = \dots = Ce^{tA}A^{n-1}(x_1 - x_2) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos

$$C\bar{x} = CA\bar{x} = \dots = CA^{n-1}\bar{x} = 0,$$

donde $\bar{x} := x_1 - x_2$. Como $\bar{x} \neq 0$, se concluye que

$$\text{rg} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{pn \times n} \right) < n.$$

Para probar la recíproca, supongamos esto último, es decir: $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $CA^i x_0 = 0, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$. Por el Teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que $CA^i x_0 = 0, \forall i \geq 0$. En consecuencia,

$$Ce^{tA}x_0 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $x_1 - x_2 = x_0$. Luego, $\forall u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ se tiene

$$\begin{aligned} Ce^{tA}x_1 &= Ce^{tA}x_2, \quad \forall t \in [0, T] \\ \iff Ce^{tA}x_1 + C \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds &= Ce^{tA}x_2 + C \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \\ \iff y_u(t, x_1) &\equiv y_u(t, x_2), \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Como $x_1 \neq x_2$, el sistema no es observable. ■

Obs. Controlabilidad y observabilidad son conceptos duales en el sentido siguiente. Notemos que

$$\operatorname{rg} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{pn \times n} \right) = n \iff \operatorname{rg} \left([C^{tr}, A^{tr}C^{tr}, \dots, (A^{n-1})^{tr}C^{tr}]_{pn \times n} \right) = n.$$

Entonces,

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \text{ es observable} \iff x'(t) = A^{tr}x(t) + C^{tr}u(t) \text{ es controlable}$$

■ Ejemplo 2.3 — Oscilador armónico.

$$x''(t) + kx(t) = u(t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1.$$

Lo escribimos como un sistema de primer orden:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

- Supongamos que podemos observar la posición: $C = (1 \ 0): y = x$.

$$\operatorname{rg} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{pn \times n} \right) = 2 \implies \text{el sistema es observable.}$$

- Supongamos que podemos observar la velocidad: $C = (0 \ 1): y = x'$.

$$\operatorname{rg} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}_{pn \times n} \right) = 2 \iff k \neq 0.$$

Es decir, si $k \neq 0$ el sistema es observable con $C = (0 \ 1)$. ■

2.5 Estabilización de sistemas lineales

2.5.1 Preliminares

Consideremos el sistema lineal

$$(L) \begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.5.1 ■ $0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio **estable** si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n : |x_0| < \delta \implies |x(t)| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

■ $0 \in \mathbb{R}^n$ es **asintóticamente estable** si es estable y $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Obs.

■ Las soluciones de (L) se escriben como

$$x(t) = \sum t^k v_k e^{\lambda_k t},$$

donde λ_k es valor propio de A .

- Si $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de A tal que $\Re(\lambda) > 0$, entonces 0 no es estable.
- Si todo $\lambda \in \mathbb{C}$ valor propio de A es tal que $\Re(\lambda) < 0$, entonces 0 es asintóticamente estable.

2.5.2 Estabilización de sistemas de control

Sea el sistema de control en \mathbb{R}^n

$$x' = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, u \in \mathbb{R}^m.$$

El objetivo es buscar un control de la forma $u(t) = Kx(t)$, donde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que 0 sea un punto asintóticamente estable de $x' = (A + BK)x$.

■ **Ejemplo 2.4 — Péndulo invertido.** Consideremos un péndulo invertido de masa m fijo a un carrito de masa M , sobre el cual podemos controlar la aceleración $u(t)$, como se muestra en la Figura 2.4. La idea es encontrar un control $u(t)$ de manera de mantener el péndulo en posición vertical, es decir, estabilizar el sistema en torno al punto de equilibrio inestable (podemos pensar esto como mantener una escoba en posición vertical con el movimiento de la mano).

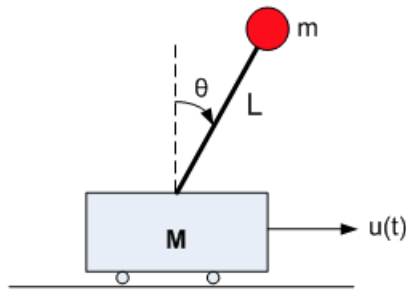


Figura 2.1: Péndulo invertido

Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{\xi} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta = u, \\ mL\ddot{\xi} \cos \theta + mL^2\ddot{\theta} - mgL \sin \theta = 0, \end{cases}$$

donde $\xi(t)$ es la posición del carro y $\theta(t)$ es el ángulo del péndulo con respecto a la vertical en el instante t . Un cálculo sencillo nos lleva al sistema no lineal de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \frac{mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \cos \theta \sin \theta + u}{M + m \sin^2 \theta}, \\ \ddot{\theta} = \frac{-mL\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + (M + m)g \sin \theta - u \cos \theta}{L(M + m \sin^2 \theta)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Definiendo el vector de estados $x(t) = (\xi(t), \theta(t), \dot{\xi}(t), \dot{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^4$, podemos escribir el sistema (2.4) como un sistema no lineal de primer orden de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.5)$$

donde $f(x, u) \in \mathbb{R}^4$ está dada por

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta} \\ \frac{mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - mg \cos \theta \sin \theta + u}{M + m \sin^2 \theta} \\ \frac{-mL\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + (M + m)g \sin \theta - u \cos \theta}{L(M + m \sin^2 \theta)} \end{pmatrix}.$$

Analicemos el sistema linealizado de (2.5) en torno al punto de equilibrio $(x_e, u_e) = (0, 0)$, el cual está dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.6)$$

donde las matrices $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{LM} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix}.$$

Buscamos $K = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ tal que $u(t) = Kx(t)$ estabilice el sistema (2.6). Basta con elegir k_1, k_2, k_3 y k_4 tales que los valores propios de $A + KB$ tengan parte real (estrictamente) positiva.

Veamos el polinomio característico de $A + KB$:

$$\begin{aligned} p_{A+BK}(z) &= \det(zI_4 - (A + BK)) \\ &= z^4 + \left(\frac{k_4}{LM} - \frac{k_3}{M}\right)z^3 + \left(\frac{k_2 - (M+m)g}{LM} - \frac{k_1}{LM^2}\right)z^2 + \frac{gk_3}{LM}z + \frac{gk_1}{LM}. \end{aligned}$$

Podemos escoger k_1, k_2, k_3 y k_4 tales que $p_{A+BK}(z) = (z + 1)^4$, por ejemplo, de modo que todos los valores propios serán iguales a -1 . Con esta elección, el sistema (2.6) es asintóticamente estable. ■

Ejercicio 2.6 Determinar k_1, k_2, k_3 y k_4 tales que $p_{A+BK}(z) = (z + 1)^4$. ■

Definición 2.5.2 El sistema $x' = Ax + Bu$ se dice **estabilizable** si existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que 0 es asintóticamente estable para $x' = (A + BK)x$.

Obs.

- $u(t) = Kx(t)$ se dice **control feedback** o **retroalimentado**.
- El control feedback es robusto con respecto a la condición inicial en el sentido de que es independiente de ella.

¿Existen condiciones para que $x' = Ax + Bu$ sea estabilizable?

2.5.3 Teorema de Localización de Polos

Teorema 2.5.1 — Teorema de Localización de Polos (Pole Shifting Theorem). Si el sistema $x' = Ax + Bu$ es controlable, entonces para todo polinomio p real unitario de grado n , existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$p_{A+BK} = p,$$

donde p_M denota el polinomio característico de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es decir, $p_M(z) = \det(zI_n - M)$.

Obs.

Un polinomio se dice **unitario** si es de la forma

$$p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \cdots + a_2 z + a_1.$$

La relación de este teorema con la estabilización está dada por el siguiente resultado.

Corolario 2.5.2 Si $x' = Ax + Bu$ es controlable, entonces es estabilizable, es decir, existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que 0 es asintóticamente estable para $x' = (A + BK)x$.

Demostración. Sea $p(z) = (z + 1)^n$. Por el Teorema de Localización de Polos, existe $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $p_{A+BK} = (z + 1)^n$, con lo cual los valores propios de $A + BK$ son iguales a -1 . En particular, el sistema $x' = Ax + Bu$ es estabilizable. ■

La demostración del Teorema de Localización de Polos se divide en dos partes:

1. Caso $m = 1$ (control escalar).
2. Caso general.

Caso $m = 1$

Comencemos con el caso $m = 1$, donde el sistema se escribe como $x' = Ax + bu$, $b \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$. La demostración se basa en el siguiente resultado.

Lema 2.5.3 Supongamos $x' = Ax + bu$ controlable. Entonces, existe $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible tal que

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}, \quad S^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $p_A(z) = z^n + \alpha_n z^{n-1} + \cdots + \alpha_1$ (polinomio característico de A).

Obs.

- La matriz $\tilde{A} = S^{-1}AS$ se llama *matriz compañera*.
- $p_A(z) = p_{SAS^{-1}}(z) = p_{S^{-1}AS}(z)$.
- Si $\tilde{B} = S^{-1}b$, el sistema $x' = Ax + bu$ es equivalente (o semejante) a $y' = \tilde{A}y + \tilde{B}u$, donde $y = S^{-1}x$. En particular, comparten la estabilización.

Asumamos el Lema 2.5.3, y probemos el Teorema.

Demostración Teorema de Localización de Polos. Caso $m = 1$. Sea $p(z) = z^n + \beta_n z^{n-1} + \cdots + \beta_1$.

Para $\tilde{K} = (\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, tenemos que

$$\tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \cdots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_1 + \tilde{k}_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_n + \tilde{k}_n \end{bmatrix}$$

Entonces, como

$$p_{\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}}(z) = z^n + (\alpha_n - \tilde{k}_n)z^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - \tilde{k}_1),$$

basta elegir $\tilde{k}_i := \alpha_i - \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, para tener $p_{\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}}(z) = p(z)$.

Finalmente, tomando $K := \tilde{K}S^{-1}$, tenemos

$$p_{A+bK}(z) = p_{A+b\tilde{K}S^{-1}}(z) = p_{S(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})S^{-1}}(z) = p_{\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}}(z) = p(z),$$

lo que termina la demostración en el caso $m = 1$. ■

Ahora, probemos el Lema.

Demostración Lema 2.5.3. Construyamos $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ según lo que debe cumplir. Denotemos por e_i el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n y notemos que dada una matriz M (con n columnas), Me_i es la i -ésima columna.

- $S^{-1}b = e_n$.

$$\boxed{Se_n := b}$$

- $S^{-1}ASe_n = e_{n-1} - \alpha_n e_n \implies Se_{n-1} = ASe_n + \alpha_n Se_n$.

$$\boxed{Se_{n-1} := Ab + \alpha_n b}$$

$$\bullet S^{-1}ASe_{n-1} = e_{n-2} - \alpha_{n-1}e_n \implies Se_{n-2} = ASe_{n-1} + \alpha_{n-1}Se_n.$$

$$Se_{n-2} := A^2b + \alpha_n Ab + \alpha_{n-1}b$$

Seguimos hasta definir

$$Se_1 := A^{n-1}b + \alpha_n A^{n-2}b + \dots + \alpha_2 b$$

Notemos que

$$S^{-1}ASe_1 = S^{-1}(A^n + \alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha_2 A)b = S^{-1}(-\alpha_1 I_n)b = -\alpha_1 e_n,$$

donde hemos usado el Teorema de Cayley-Hamilton.

Ahora, como $x' = Ax + bu$ es controlable, el conjunto $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ es linealmente independiente, lo que implica que las columnas de S también lo son y, por lo tanto, S es invertible. ■

Caso general

Veamos ahora el caso general. Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.5.4 Supongamos $x' = Ax + Bu$ controlable. Entonces, existen $f \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que el sistema

$$x' = (A + BC)x + Bfv, \quad v \in \mathbb{R},$$

es controlable.

Asumamos primero este resultado y probemos el Teorema.

Demostración Teorema de Localización de Polos. Caso general. Sea $p(z) = z^n + \beta_n z^{n-1} + \dots + \beta_1$. Por el Lema 2.5.4, existen $f \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que el sistema $x' = (A + BC)x + Bfv$ es controlable. Del caso $m = 1$, sabemos que existe $\bar{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tal que

$$P_{A+BC+Bf\bar{K}}(z) = p(z).$$

Definiendo $K := C + f\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tenemos

$$P_{A+BK}(z) = P_{A+BC+Bf\bar{K}}(z) = p(z),$$

lo que termina la demostración en el caso general. ■

Demostración Lema 2.5.4. Sea $f \in \mathbb{R}^m$ tal que $Bf \neq 0$. Tal f debe existir, pues de lo contrario $B = 0$, lo que no puede ser pues el sistema $x' = Ax + Bu$ es controlable.

Sea $x_1 = Bf \neq 0$. Construimos una secuencia de $x_i \in \mathbb{R}^n$ como:

- $x_{i+1} \notin \langle \{x_1, \dots, x_i\} \rangle$
- $x_{i+1} \in Ax_i + B\mathbb{R}^m$

donde $B\mathbb{R}^m = \{Bu / u \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$. Notar que paramos cuando $Ax_j + B\mathbb{R}^m \subset \langle \{x_1, \dots, x_j\} \rangle$.

Por construcción, esta secuencia se detiene en algún $k \leq n$ y x_1, \dots, x_k son linealmente independientes. Probemos que $k = n$.

Sea $E = \langle \{x_1, \dots, x_k\} \rangle$. Por definición de k ,

$$Ax_k + Bu \in E, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m.$$

En particular, con $u = 0$ tenemos $Ax_k \in E$ y, por lo tanto, $B\mathbb{R}^m \subset E$.

Por otra parte,

$$Ax_i \in x_{i+1} + B\mathbb{R}^m \subset E, \quad \forall i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Como además $Ax_k \in E$, se tiene $AE \subset E$. Esto, junto con $B\mathbb{R}^m \subset E$, implica que

$$\langle \{A^i Bu / u \in \mathbb{R}^m, i \in \{0, \dots, n-1\}\} \rangle \subset E.$$

Como $x' = Ax + Bu$ es controlable, se satisface la condición de Kalman y en consecuencia

$$\langle \{A^i Bu / u \in \mathbb{R}^m, i \in \{0, \dots, n-1\}\} \rangle = \mathbb{R}^n.$$

Así, $E = \mathbb{R}^n$, $k = n$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ son linealmente independientes.

Ahora, construyamos la matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Notemos que $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\exists u_i \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i.$$

Como x_1, \dots, x_n son linealmente independientes, existe $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$Cx_i = u_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, Cx_n \text{ cualquiera.}$$

En efecto, basta tomar

$$C := \begin{bmatrix} u_1 & | & u_2 & | & \dots & | & u_{n-1} & | & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & | & x_2 & | & \dots & | & x_n \end{bmatrix}^{-1}.$$

Tenemos:

- $x_1 = Bf$.
- $(A + BC)x_1 = Ax_1 + Bu_1 = x_2$.
- $(A + BC)^2 x_1 = (A + BC)x_2 = Ax_2 + Bu_2 = x_3$.
- \vdots
- $(A + BC)^{n-1} x_1 = x_n$.

Si llamamos $\bar{A} = A + BC$ y $\bar{b} = Bf$, vemos que $\{\bar{b}, \bar{A}\bar{b}, \bar{A}^2\bar{b}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}\}$ es un conjunto linealmente independiente. Equivalentemente, la matriz $[\bar{b} | \bar{A}\bar{b} | \bar{A}^2\bar{b} | \dots | \bar{A}^{n-1}\bar{b}]$ satisface la condición de Kalman y el sistema $x' = \bar{A}x + \bar{b}v = (A + BC)x + Bfv$ es controlable. ■

3. Control Óptimo de Sistemas Lineales

3.1 Introducción

Consideremos el sistema lineal de control

$$(L) \begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $A \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$, $B \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times m})$ y $u \in L^\infty(0, T; U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$, es decir, los valores del control están limitados al conjunto U .

Sea $x_1 \in \mathbb{R}^n$ **accesible** desde x_0 en tiempo T :

$$\exists u \in L^\infty(0, T; U), \exists T > 0, x_u(T) = x_1.$$

Problema de Control Óptimo: Entre los controles $u \in L^\infty(0, T; U)$ que llevan el sistema desde x_0 a x_1 , busquemos el que minimiza un funcional $C(u)$.

Veremos dos tipos de problemas de control óptimo:

1. Problema de tiempo mínimo:

$$C(u) = T : \text{tiempo de control de } x_0 \text{ a } x_1.$$

2. Problema de costo cuadrático:

$$C(u) = x(T)^{tr} Q x(T) + \int_0^T (x(t)^{tr} W(t) x(t) + u(t)^{tr} U(t) u(t)) dt$$

donde $Q, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

3.2 Problema de tiempo mínimo

Sea $x_1 \in \mathbb{R}^n$ **accesible** desde x_0 (en algún tiempo T). El **problema de tiempo mínimo** consiste en encontrar un control que lleve el sistema (L) de x_0 a x_1 en el menor tiempo posible.

Definición 3.2.1 — Conjunto alcanzable o accesible desde x_0 en tiempo t .

$$\text{Acc}_U(t, x_0) := \left\{ x_u(t) \mid \begin{array}{l} x_u \text{ solución de } (L) \text{ con condición inicial } x_0 \text{ y} \\ \text{control } u \in L^\infty(0, t, U) \end{array} \right\}.$$

Obs.

- $\text{Acc}_U(0, x_0) = \{x_0\}$
- $x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0) \iff \exists u \in L^\infty(0, t; U), x_u(t) = x_1$
- Si t^* es el tiempo mínimo, entonces $\forall t < t^*, x_1 \notin \text{Acc}_U(t, x_0)$. Así:

$$t^* = \inf\{t > 0 / x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0)\}$$

Pregunta: $\zeta t^* = \inf\{t > 0 / x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0)\}$ está bien definido? Es decir: $\zeta x_1 \in \text{Acc}_U(t^*, x_0)$?

- **Ejemplo 3.1** $x' = u, x, u \in \mathbb{R}, x_0 = 0, x_1 = 1. (U = \mathbb{R})$.

Notemos que el control $u(t) = \frac{1}{T}$ lleva el sistema de $x_0 = 0$ a $x_1 = 1$ en tiempo $T, \forall T > 0$. Entonces, $t^* = 0$, pero $x_1 \notin \text{Acc}(0, x_0) = \{x_0\}$. ■

- **Ejemplo 3.2** $x' = u, x \in \mathbb{R}, u \in [0, 1), x_0 = 0, x_1 = 1. (U = [0, 1))$.

Notemos para todo $T > 1$, el control $u(t) = \frac{1}{T} \in [0, 1)$ lleva el sistema de $x_0 = 0$ a $x_1 = 1$ en tiempo T .

Por otro lado, si $T \leq 1$ y u es un control tal que $x(0) = 0$ y $x(T) = 1$, entonces, integrando en la ecuación $x' = u$, tenemos

$$1 = \int_0^T u(t) dt < \int_0^T dt = T,$$

lo que es una contradicción.

Esto implica que $t^* = 1$, pero $x_1 \notin \text{Acc}(1, x_0) = \{x_0\}$. ■

En ambos ejemplos, el tiempo mínimo de control no es alcanzado. En el primero, U es no acotado, lo que hace que el control sea “arbitrariamente rápido”. En el segundo, el problema es que U no es cerrado.

En lo que sigue, supondremos que $U \subset \mathbb{R}^m$ es *compacto*.

- **Ejemplo 3.3** $U = [-1, 1]^m$ ($[-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]$, m veces). ■

La existencia de un control de tiempo mínimo es consecuencia del siguiente resultado, que entrega algunas propiedades sobre la topología de $\text{Acc}_U(t, x_0)$.

Teorema 3.2.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Entonces, $\forall t \geq 0, \text{Acc}_U(t, x_0)$ es convexo, compacto y varía continuamente con respecto a t .

Demostración Teorema 3.2.1, parte 1. • **Convexidad.** Supongamos primero que U es convexo. Sean x_1 y $x_2 \in \text{Acc}_U(t, x_0)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Queremos demostrar que

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{Acc}_U(t, x_0).$$

Sabemos que $\exists u_1, u_2 \in L^\infty(0, t; U)$ tales que

$$\begin{aligned} x_1 &= R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds \\ x_2 &= R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) u_2(s) ds \end{aligned} \quad (3.1)$$

De esta forma,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) (\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)) ds$$

Como U es convexo, $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in L^\infty(0, t; U)$ y vemos que $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in \text{Acc}_U(t, x_0)$.

Veamos el caso general (U no necesariamente convexo). Sean x_1 y $x_2 \in \text{Acc}_U(t, x_0)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Queremos demostrar que

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{Acc}_U(t, x_0).$$

Como antes, de (3.1) tenemos que

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) (\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)) ds,$$

donde $u_1, u_2 \in L^2(0, t; U)$.

Como no podemos asegurar que $\lambda u_1(s) + (1 - \lambda)u_2(s)$ es a valores en U , necesitaremos el siguiente lema, cuya demostración omitiremos.

Lema 3.2.2 — Lyapunov. Sea $T > 0$ y $f \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n)$ entonces

$$\left\{ \int_{\omega} f(s) ds \mid \omega \subseteq [0, T] \text{ medible} \right\}$$

es convexo en \mathbb{R}^n .

Volvamos a nuestra demostración. Definamos

$$X = \left\{ X_{\omega} = \begin{pmatrix} \int_{\omega} R(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds \\ \int_{\omega} R(s)^{-1} B(s) u_2(s) ds \end{pmatrix} \mid \omega \subseteq [0, T] \text{ medible} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2n},$$

$$y_1 = \int_0^t R(s)^{-1} B(s) u_1(s) ds,$$

$$y_2 = \int_0^t R(s)^{-1} B(s) u_2(s) ds.$$

$$\text{Vemos que } X_{\emptyset} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_{[0, t]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Por el Lema de Lyapunov, X es convexo y por lo tanto $\exists \omega \subseteq [0, T]$ medible tal que $X_{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix}$.

Como $X_\omega + X_{\omega^c} = X_{[0,t]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tenemos que $X_{\omega^c} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)y_1 \\ (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix}$.

Para demostrar lo que queremos, nos basta con encontrar un control $u \in L^2(0,t;U)$ tal que

$$\int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)ds = \int_\omega R(s)^{-1}B(s)u(s)ds + \int_{\omega^c} R(s)^{-1}B(s)u(s)ds = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2.$$

Definamos

$$u(s) = \begin{cases} u_1(s), & \text{si } s \in \omega, \\ u_2(s), & \text{si } s \in \omega^c. \end{cases}$$

Notemos que $u \in L^2(0,t;U)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)ds &= \underbrace{\int_\omega R(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds}_{\text{primera coordenada de } x_\omega} + \underbrace{\int_{\omega^c} R(s)^{-1}B(s)u_2(s)ds}_{\text{segunda coordenada de } x_{\omega^c}} \\ &= \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{aligned}$$

lo cual prueba la convexidad de $\text{Acc}_U(t, x_0)$. ■

Obs. Usando argumentos similares a la demostración de la convexidad de $\text{Acc}_U(t, x_0)$, se puede probar que

$$\left\{ \int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)ds / u \in L^2(0,t;U) \right\} = \left\{ \int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)ds / u \in L^2(0,t;\text{conv}(U)) \right\},$$

donde $\text{conv}(U)$ denota la *envoltura convexa* de U .

Corolario 3.2.3 Sean $U \in \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\text{Acc}_U(t, x_0) = \text{Acc}_{\text{conv}(U)}(t, x_0).$$

En particular, como $\text{conv}(U) = \text{conv}(\partial U)$, se tiene

$$\text{Acc}_U(t, x_0) = \text{Acc}_{\text{conv}(\partial U)}(t, x_0).$$

Seguimos con la demostración del Teorema 3.2.1. Gracias al Corolario 3.2.3, podemos suponer en lo que sigue que U es convexo.

Demostración Teorema 3.2.1, parte 2. • **Compacidad.** Sea $\{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \text{Acc}_U(t, x_0)$ una sucesión de estados alcanzables asociados a controles $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq L^\infty(0,t;U)$. De esta forma, tenemos

$$x^k(t) = x_1^k = R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1}B(s)u^k(s)ds.$$

Como $u^k \in L^\infty(0,t;U) \subseteq L^2(0,t;U) \subseteq L^2(0,t;\mathbb{R}^m)$, vemos que $x^k(t) \in L^\infty(0,t;\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(0,t;\mathbb{R}^n)$. Como U es compacto y por las propiedades del resolvente $R(\cdot)$ (continuidad) y de $B(\cdot)$ (en $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n \times m})$), se tendrá que existe $C > 0$ tal que

$$\|x^k(\cdot)\|_{L^2(0,t;\mathbb{R}^n)} \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, la sucesión de trayectorias $\{x^k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$.

Como la sucesión de controles $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está también acotada en $L^2(0, t; \mathbb{R}^m)$ y $(x^k)' = A(t)x^k + B(t)u^k$, se concluye que $\{(x^k)'\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$.

Así, tenemos que la sucesión de trayectorias $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotada en $H^1(0, t; \mathbb{R}^n)$, que se inyecta compactamente en $C([0, t]; \mathbb{R}^n)$. Esto nos dice que existe una subsucesión (que notaremos igual) $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en $C([0, t]; \mathbb{R}^n)$.

Por otra parte, como $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^2(0, T; U) \subseteq L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$, existirá $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que una subsucesión converge a u . Como estamos suponiendo U convexo, se tendrá que $u \in L^2(0, t; U)$.

Entonces, podemos de esta forma pasar al límite,

$$\begin{array}{ccc} x_1^k & = & R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R(s)^{-1}B(s)u^k(s)ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & & R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R(s)^{-1}B(s)u(s)ds \end{array}$$

Conclusión: $x_1^k \rightarrow x_1$ con $x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0)$, lo que muestra la compacidad de $\text{Acc}_U(t, x_0)$.

• **Continuidad con respecto a t .** Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\forall t_1, t_2 \geq 0, |t_1 - t_2| < \delta \implies d(\text{Acc}_U(t_1, x_0), \text{Acc}_U(t_2, x_0)) \leq \varepsilon.$$

Aquí, para $A, B \subset \mathbb{R}^n$ consideramos

$$d(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in B} d(x, A), \sup_{x \in A} d(x, B) \right\},$$

donde $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

Sean $0 \leq t_1 < t_2$. Basta probar que

1. $\forall x_2 \in \text{Acc}_U(t_2, x_0), d(x_2, \text{Acc}_U(t_1, x_0)) < \varepsilon$.
2. $\forall x_1 \in \text{Acc}_U(t_1, x_0), d(x_1, \text{Acc}_U(t_2, x_0)) < \varepsilon$.

Probemos (1) (propiedad (2) es análoga). Sea $x_2 \in \text{Acc}_U(t_2, x_0)$. Probemos que

$$\exists y \in \text{Acc}_U(t_1, x_0) \text{ tal que } |x_2 - y| < \varepsilon.$$

Tenemos que $x_2 = x(t_2)$ para alguna trayectoria $x = x(t)$ asociada a un control $u \in L^\infty(0, t; U)$. Sea $y = x(t_1)$ (con el mismo control u).

Tenemos,

$$\begin{aligned} x_2 - y &= x(t_2) - x(t_1) \\ &= R(t_2)x_0 + \int_0^{t_2} R(t_2)R(s)^{-1}B(s)u(s)ds - R(t_1)x_0 - \int_0^{t_1} R(t_1)R(s)^{-1}B(s)u(s)ds \\ &= R(t_2) \int_{t_1}^{t_2} R(s)^{-1}B(s)u(s)ds + [R(t_2) - R(t_1)] \left\{ x_0 + \int_0^{t_1} R(s)^{-1}B(s)u(s)ds \right\} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

De esta igualdad, observamos que si $|t_2 - t_1|$ es suficientemente pequeño:

- I_1 es pequeño ya que el intervalo de integración será pequeño.
- I_2 es pequeño por la continuidad de $t \mapsto R(t)$.

Esto termina la demostración. ■

Volvamos a la existencia del tiempo mínimo. Sean $x_1 \in \mathbb{R}^n$ accesible desde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^m$ compacto.

Por el Teorema 3.2.1, el conjunto $C = \{t > 0 / x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0)\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado, pues $\text{Acc}_U(t, x_0)$ es cerrado y varía continuamente con respecto a t . Además, C es acotado inferiormente. En particular, tiene mínimo (el ínfimo es alcanzado). En consecuencia, hemos probado:

Teorema 3.2.4 Sean $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Si $\exists T > 0$ y $\exists u \in L^\infty(0, T; U)$ tales que $x_u(0) = x_0$ y $x(T) = x_1$ (x_1 accesible desde x_0), entonces existe un control (y trayectoria) de tiempo mínimo de x_0 a x_1 .

Obs.

- t^* es el primer tiempo en que $x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0)$.
- Se tiene necesariamente que $x_1 \in \partial \text{Acc}_U(t^*, x_0) = \text{Acc}_U(t^*, x_0) \setminus \text{int}(\text{Acc}_U(t^*, x_0))$.
En efecto, si $x_1 \in \text{int}(\text{Acc}_U(t^*, x_0))$, por la continuidad de $\text{Acc}_U(t, x_0)$ con respecto a t , si $t < t^*$ es suficientemente cercano a t^* , se tendría $x_1 \in \text{Acc}_U(t, x_0)$, lo que contradice que t^* es el tiempo mínimo.

Definición 3.2.2 — Control extremal. Un control u se dice *extremal* en $[0, t]$ si $x_u(t) \in \partial \text{Acc}_U(t, x_0)$.

Obs.

- Todo control de tiempo mínimo es extremal (la recíproca no es cierta).
- Se puede dar una caracterización de un control extremal, y por lo tanto una condición necesaria para un control de tiempo mínimo.

3.2.1 Principio del Máximo (caso lineal)

El siguiente resultado entrega una condición necesaria para un control de tiempo mínimo.

Teorema 3.2.5 Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ compacto y $T > 0$. El control $u \in L^\infty(0, T; U)$ es extremal en $[0, T]$ si y sólo si existe una solución no trivial $p(t) \in \mathbb{R}^n$ de

$$p'(t)^{tr} = -p(t)^{tr}A(t),$$

tal que

$$p(t)^{tr}B(t)u(t) = \max_{v \in U} p(t)^{tr}B(t)v, \text{ ctp } t \in [0, T].$$

Obs.

- $p(t) \in \mathbb{R}^n$ es llamado **vector adjunto**.
- $p'(t)^{tr} = -p(t)^{tr}A(t)$ es llamada **ecuación adjunta**. La solución viene dada por

$$p(t)^{tr} = p(0)^{tr}R(t)^{-1},$$

donde $R(t)$ es el resolvente del sistema $x' = A(t)x$.

Demostración. Podemos suponer que U es convexo, pues $\text{Acc}_U(T, x_0) = \text{Acc}_{\text{conv}(U)}(T, x_0)$. Si $u \in L^\infty(0, T; U)$ es extremal, entonces $x(T) \in \partial \text{Acc}_U(T, x_0)$, donde $x(\cdot)$ es la trayectoria asociada a u .

Como $\text{Acc}_U(T, x_0)$ convexo, existe un hiperplano que separa $x(T)$ y $\text{Acc}_U(T, x_0)$. Sea $p_T \in \mathbb{R}^n$ el vector normal exterior a $\text{Acc}_U(T, x_0)$ en $x(T)$ y que define tal hiperplano. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} & \forall x_1 \in \text{Acc}_U(T, x_0), p_T^{tr}(x_1 - x(T)) \leq 0 \\ \iff & \forall u_1 \in L^\infty(0, T; U), p_T^{tr}(x_1(T) - x(T)) \leq 0 \\ \iff & \forall u_1 \in L^\infty(0, T; U), p_T^{tr}x(T) \geq p_T^{tr}x_1(T) \\ \iff & \forall u_1 \in L^\infty(0, T; U), \int_0^T p_T^{tr}R(T)R(t)^{-1}B(t)u(t) dt \geq \int_0^T p_T^{tr}R(T)R(t)^{-1}B(t)u_1(t) dt. \end{aligned}$$

Sea $p(\cdot)$ la solución de

$$\begin{cases} p'(t)^{tr} = -p(t)^{tr}A(t), \\ p(T) = p_T. \end{cases} \quad (3.2)$$

Como $p(t)^{tr} = p(0)^{tr}R(t)^{-1}$, se tiene $p_T^{tr} = p(0)^{tr}R(T)^{-1} = p(t)^{tr}R(t)R(T)^{-1}$. Entonces,

$$\forall u_1 \in L^\infty(0, T; U), \int_0^T p(t)^{tr}B(t)u(t) dt \geq \int_0^T p(t)^{tr}B(t)u_1(t) dt. \quad (3.3)$$

Supongamos que $\exists E \subset [0, T]$, $|E| > 0$ (medida positiva) tal que

$$p(t)^{tr}B(t)u(t) < \max_{v \in U} p(t)^{tr}B(t)v, \forall t \in E.$$

Sea

$$\bar{u} = \begin{cases} u(t), & t \notin E, \\ m(t), & t \in E, \end{cases}$$

donde $m(t) := \arg \max_{v \in U} p(t)^{tr}B(t)v$. Tenemos que $\bar{u} \in L^\infty(0, T; U)$ y además

$$\int_0^T p(t)^{tr}B(t)u(t) dt < \int_0^T p(t)^{tr}B(t)\bar{u}(t) dt,$$

lo que contradice (3.3).

Para la recíproca, supongamos que $p(\cdot)$ es solución de (3.2) con $p_T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y

$$p(t)^{tr}B(t)u(t) = \max_{v \in U} p(t)^{tr}B(t)v, \text{ ctp } t \in [0, T].$$

Invirtiendo el argumento anterior tenemos

$$\forall x_1 \in \text{Acc}_U(T, x_0), p_T^{tr}(x_1 - x(T)) \leq 0,$$

donde $x(\cdot)$ es la trayectoria asociada a $u(\cdot)$. Queremos probar que $x(T) \in \partial \text{Acc}_U(T, x_0)$. En efecto, si $x(T) \in \text{int}(\text{Acc}_U(T, x_0))$, existiría $\hat{x}_1 \in \text{Acc}_U(T, x_0)$, $\hat{x}_1 \neq x(T)$, que estaría en la semi-recta que pasa por $x(T)$ en la dirección p_T . En particular, se tendría

$$p_T^{tr}(\hat{x}_1 - x(T)) > 0,$$

lo que es una contradicción. En conclusión, $x(T) \in \partial \text{Acc}_U(T, x_0)$ y u es extremal en $[0, T]$. ■

Obs.

- El principio del máximo es una condición necesaria de optimalidad.
- p_T ó $p(0)$ no se conoce explícitamente, por lo que no se puede usar el teorema anterior para construir el control en forma directa.
- En el caso $m = 1$, $U = [-a, a]$, $a > 0$, la condición de maximización implica que

$$u(t) = a \operatorname{signo}(p(t)^T B(t)).$$

- $\varphi(t) := p(t)^T B(t)$ se llama **función de conmutación**.
- $t_c \in [0, T]$ donde $\varphi(t)$ cambia de signo se llama **tiempo de conmutación**.

3.2.2 Ejemplo del carro-cohete con dos motores

En este ejemplo consideraremos un carro de masa unitaria, que se mueve sobre un riel recto. El carro consta de motores propulsores, uno a cada lado. Ver Figura 3.1. Para describir el estado de este sistema utilizaremos $q(t)$ para la posición y $v(t) = \dot{q}(t)$ para la velocidad. El control vendrá dado por una función $\alpha(t)$ que satisface $-1 \leq \alpha(t) \leq 1$, y que representa el empuje que recibe el carro producto de la acción de los motores.

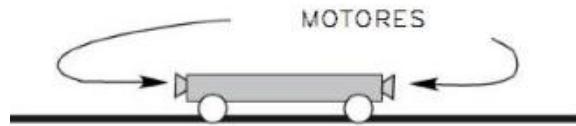


Figura 3.1: Carro-cohete con dos motores.

La ecuación que modela la evolución de este sistema es

$$\ddot{q}(t) = \alpha(t), \quad (3.4)$$

que también podemos escribir como un sistema de primer orden como sigue

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha. \quad (3.5)$$

Dada una condición inicial $q(0) = q_0$ y $v(0) = v_0$ para este problema, nuestro objetivo es encontrar el control α^* que lleva el estado (q, v) al origen (a la posición 0 y al reposo) en el mínimo tiempo posible.

Este sistema es controlable. En efecto, se encuentra que la matriz de Kalman es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Podemos así aplicar el Teorema 3.2.4 para demostrar que el problema de tiempo mínimo tiene una solución óptima. Para buscarla usamos el Teorema 3.2.5, que nos lleva a resolver el sistema adjunto

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene que

$$\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1(t) = p_1(0)$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 = -p_1(0) \Rightarrow p_2(t) = -tp_1(0) + p_2(0)$$

de donde la función de conmutación resulta ser

$$B^*(t)p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_2(t) = -tp_1(0) + p_2(0).$$

Esto nos dice que el control α^* de tiempo mínimo satisface

$$\alpha^*(t) = \text{signo}(-tp_1(0) + p_2(0))$$

por lo que concluimos que cambia a lo más una vez de signo.

Debemos encontrar cómo son las trayectorias con controles extremales $\alpha = 1$ ó $\alpha = -1$. Este tipo de controles reciben el nombre de controles *bang-bang*. Para llevar el carro al reposo prendemos alternadamente el motor derecho a su máxima potencia ($\alpha = -1$) o el motor izquierdo a su máxima potencia ($\alpha = 1$). Para hacernos una idea de la trayectoria optimal, veamos como se comportan las soluciones de (3.5) cuando el control vale 1 ó -1.

- **Supongamos $\alpha = 1$.** En este caso las ecuaciones son

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = 1,$$

lo que implica $v\dot{v} = \dot{q}$, es decir,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = \dot{q}.$$

Integrando de t_0 a t obtenemos

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{v^2(t_0)}{2} = q(t) - q(t_0),$$

de donde podemos escribir

$$v^2(t) = 2q(t) + b, \tag{3.6}$$

con $b = v^2(t_0) - 2q(t_0)$ una constante. Esto nos dice que la trayectoria permanece en la curva (3.6) y como $\dot{v} = 1$, se mueve hacia arriba. Ver Figura 3.2.

- **Supongamos $\alpha = -1$.** En este caso las ecuaciones son

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = -1,$$

lo que implica $v\dot{v} = -\dot{q}$, es decir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = -\dot{q}.$$

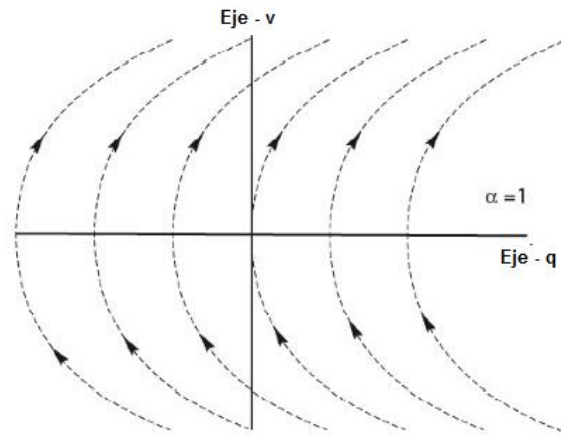
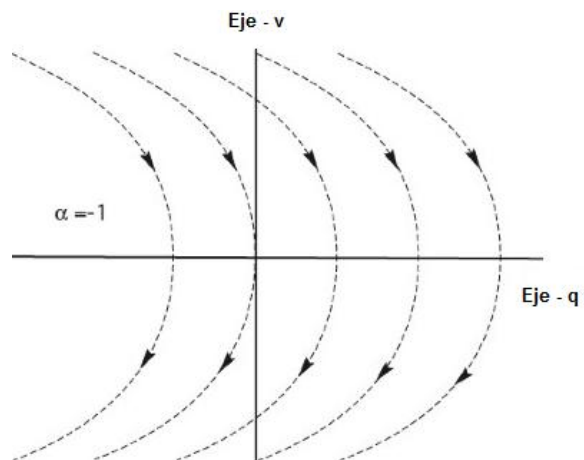
Integrando de t_0 a t obtenemos

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{v^2(t_0)}{2} = -q(t) + q(t_0),$$

de donde podemos escribir

$$v^2(t) = -2q(t) + c, \tag{3.7}$$

con $c = 2q(t_0) - v^2(t_0)$ una constante. Esto nos dice que la trayectoria permanece en la curva (3.7) y como $\dot{v} = -1$, se mueve hacia abajo. Ver Figura 3.3.

Figura 3.2: Curvas asociadas con $\alpha = 1$.Figura 3.3: Curvas asociadas con $\alpha = -1$.

Con este análisis, podemos diseñar trayectorias que lleven cualquier estado inicial del carro al reposo en el origen. Como buscamos la trayectoria que cumpla esto en un tiempo mínimo, una posible respuesta viene dada por la estrategia siguiente. Supongamos que partimos de una posición positiva con velocidad positiva (q_0, v_0) . La estrategia viene dada por prender el motor derecho a su máxima capacidad ($\alpha = -1$) y así desplazarnos hacia abajo por la parábola $v^2 = -2q + (v_0^2 + 2q_0)$, hasta que intersectemos la parábola que pasa por el origen $v^2 = 2q$. Ver Figura 3.4. En ese momento apagamos el motor derecho y prendemos el izquierdo ($\alpha = 1$). Así comenzaremos a movernos hacia arriba en la parábola que pasa por el origen y llevaremos el sistema al origen y al reposo.

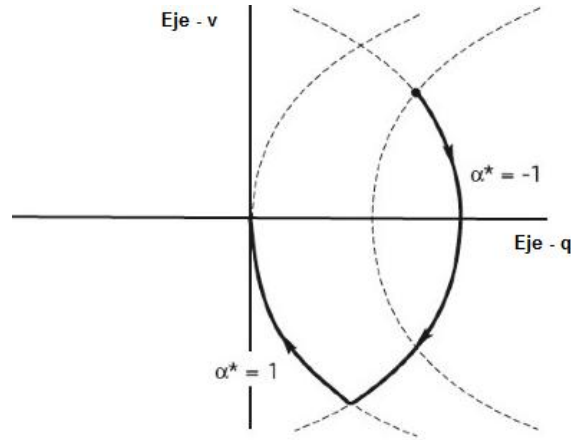


Figura 3.4: Estrategia óptima.

Gracias al Principio del Máximo, podemos estar seguros que la estrategia de la Figura 3.4 es la óptima.

3.3 Problema de costo cuadrático

Consideremos el sistema de control lineal en \mathbb{R}^n :

$$(L) \begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $A \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$, $B \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times m})$, y un *costo cuadrático* del tipo

$$C(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t)) dt,$$

donde:

- $T > 0$ está fijo.
- $U \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{m \times m})$ es simétrica definida positiva.
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $W \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$ son simétricas semi-definidas positivas.
- $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ (espacio natural dado que el costo es cuadrático).

El problema de **control óptimo lineal cuadrático (LC)** es: dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $T > 0$, determinar las trayectorias de (L) que minimicen el costo $C(u)$.

Obs. Usaremos la siguiente notación cuando sea conveniente:

- $g(x) = x^T Q x$,
- $|x(t)|_W^2 = x(t)^T W(t) x(t)$,
- $|u(t)|_U^2 = u(t)^T U(t) u(t)$.

Con las notaciones anteriores, el costo se puede escribir como

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt.$$

Para asegurar la existencia de una solución del problema LC, asumiremos la siguiente hipótesis sobre U :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \int_0^T |u(t)|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^T |u(t)|^2 dt. \quad (H)$$

Esta hipótesis se verifica si, por ejemplo:

- $t \mapsto U(t)$ es continua, o
- $\exists c > 0, \forall t \in [0, T], \forall v \in \mathbb{R}^m, v^T U(t) v \geq c v^T v = c |v|^2$.

Teorema 3.3.1 Supongamos la hipótesis (H). Entonces, el problema LC admite una única solución.

Demostración. **Existencia.** Sea $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ una sucesión minimizante, es decir,

$$C(u_k) \rightarrow \inf_{u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)} C(u) =: \gamma.$$

Mostremos que $\exists \bar{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que $u_k \rightharpoonup \bar{u}$ y $C(\bar{u}) = \gamma$.

• Como Q, W y U son semi-definidas positivas, tenemos que $\gamma \geq 0$. Por otro lado, tomando $u \equiv 0$ encontramos que

$$\gamma \leq g(x(T)) + \int_0^T |x(t)|_W^2 dt.$$

En particular, $\gamma < +\infty$.

• Por la hipótesis (H), tenemos que $\exists \alpha > 0$ tal que

$$\alpha \int_0^T |u_k(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u_k(t)|_U^2 dt \leq C(u_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $(C(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge, es acotada y, por lo tanto, también $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Entonces, existen una subsucesión de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (que la llamamos igual) y $\bar{u} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que $u_k \rightharpoonup \bar{u}$.

• Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos $x_k(\cdot)$ la trayectoria asociada a u_k . Se tiene

$$x_k(t) = R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) u_k(s) ds, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T].$$

Como $u_k \rightharpoonup \bar{u}$, se prueba que $x_k(\cdot)$ converge puntualmente a

$$\bar{x}(t) = R(t)x_0 + R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) \bar{u}(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Más aún, esta convergencia es uniforme, pues la familia $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en $[0, T]$. En efecto, sean $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$:

$$\begin{aligned} x_k(t_2) - x_k(t_1) &= R(t_2)x_0 + R(t_2) \int_0^{t_2} R(s)^{-1}B(s)u_k(s)ds - R(t_1)x_0 - R(t_1) \int_0^{t_1} R(s)^{-1}B(s)u_k(s)ds \\ &= R(t_2) \int_{t_1}^{t_2} R(s)^{-1}B(s)u_k(s)ds + [R(t_2) - R(t_1)] \left\{ x_0 + \int_0^{t_1} R(s)^{-1}B(s)u_k(s)ds \right\}. \end{aligned}$$

Se concluye usando la continuidad de $t \mapsto \mathbb{R}(t)$ y el hecho de que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

• En este último paso, probaremos que $C(\bar{u}) \leq \gamma$, lo que, por la definición de γ , implica que $C(\bar{u}) = \gamma$.

Comencemos notando que

- $x_k(\cdot) \rightarrow \bar{x}(\cdot)$ puntualmente $\implies g(x_k) \rightarrow g(\bar{x})$.
- $x_k(\cdot) \rightarrow \bar{x}(\cdot)$ uniformemente $\implies \int_0^T |x_k(t)|_W^2 dt \rightarrow \int_0^T |\bar{x}(t)|_W^2 dt$.

Ahora, denotemos por $\phi : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ a

$$\phi(u) = \int_0^T |u(t)|_U^2 dt,$$

que es continua en $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ (para la topología fuerte) y (estrictamente) convexa (pues $U(t)$ es definida positiva). Entonces, ϕ es semi-continua inferior para la topología débil. Como $u_k \rightharpoonup \bar{u}$, esto implica que

$$\phi(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \phi(u_k).$$

Gracias a las convergencias de las partes del costo $C(u)$, tenemos que

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow +\infty} C(u_k) \geq C(\bar{u}).$$

Esto termina la prueba de la existencia.

Unicidad. La unicidad es consecuencia de que $C : L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa.

En efecto, $\forall t \in [0, T]$:

- $u \mapsto |u|_U^2$ es estrictamente convexa, pues $U(t)$ es simétrica definida positiva.
- $u \mapsto x_u(\cdot)$ es convexa (por la linealidad de (L)). Esto implica que
 - $u \mapsto |x_u(\cdot)|_W^2$ es convexa, pues $W(t)$ es simétrica semi-definida positiva.
 - $u \mapsto g(x_u(T))$ es convexa, pues Q es simétrica semi-definida positiva.
- $\int_0^T \cdot dt$ mantiene la convexidad, pues es un operador lineal.

■

Obs. Este resultado es válido si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua convexa. También es válido si $T = +\infty$, $g \equiv 0$ y el sistema (L) es controlable en algún tiempo positivo. La prueba es la misma, pero hay que asegurar la existencia de trayectorias en $[0, +\infty)$ y de costo finito.

En efecto, si el sistema es controlable en algún tiempo $T > 0$, entonces existe $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que $x(T) = 0$. Definimos el control

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Como la trayectoria asociada es

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

se tiene que $C(\bar{u}) < +\infty$. Con esto probamos

Proposición 3.3.2 Supongamos la hipótesis (H) en $[0, +\infty)$. Si el sistema $x' = A(t)x + B(t)u$ es controlable en un tiempo $T > 0$, entonces el problema LC en $[0, +\infty)$ asociado al costo

$$C(u) = \int_0^{+\infty} (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt,$$

tiene una única solución.

3.3.1 Principio del máximo (caso LC)

Probaremos una condición suficiente y necesaria para la solución del problema lineal cuadrático.

Teorema 3.3.3 El par $(x(t), u(t))$ es solución del problema lineal cuadrático si y sólo si existe $p(t) \in \mathbb{R}^n$ solución de la ecuación adjunta

$$\begin{cases} p'(t)^{tr} = -p(t)^{tr}A(t) + x(t)^{tr}W(t), & \text{ctp } t \in (0, T) \\ p(T)^{tr} = -x(T)^{tr}Q. \end{cases}$$

Además, el control óptimo u está dado por

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^{tr}p(t)$$

Demostración. Sea $(x(t), u(t))$ solución del problema lineal cuadrático y $\delta u(t) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ una perturbación de $u(t)$.

- Si $\hat{u}(t) = u(t) + \delta u(t)$, la trayectoria asociada es

$$\hat{x}(t) = x(t) + \delta x(t),$$

donde

$$\delta x(t) = R(t) \int_0^t R(s)^{-1} B(s) \delta u(s) ds,$$

es decir, $\delta x(t)$ es la solución de

$$\begin{cases} \delta x'(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0. \end{cases}$$

- Como u es mínimo de $C(u)$, entonces $\delta C(u) = 0$ (1ra variación de $C(u)$), es decir:

$$\delta C(u)\delta u = 0, \forall \delta u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m).$$

Además, como Q , $W(t)$ y $U(t)$ son simétricas:

$$\frac{1}{2} \delta C(u)\delta u = x(T)^{tr}Q\delta x(T) + \int_0^T (x(t)^{tr}W(t)\delta x(t) + u(t)^{tr}U(t)\delta u(t)) dt.$$

- Sea $p(t) \in \mathbb{R}^n$ la solución de la ecuación adjunta. Entonces:

$$p(t)^{tr} = p(0)^{tr}R(t)^{-1} + \int_0^t x(s)^{tr}W(s)R(s)dsR(t)^{-1}, \quad (3.8)$$

y como $p(T)^{tr} = -x(T)^{tr}Q$:

$$-x(T)^{tr}Q = p(0)^{tr}R(T)^{-1} + \int_0^T x(s)^{tr}W(s)R(s)dsR(T)^{-1}. \quad (3.9)$$

- Ahora, usando la expresión de $\delta x(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)^{tr}W(t)\delta x(t)dt &= \int_0^T x(t)^{tr}W(t)R(t) \int_0^t R(s)^{-1}B(s)\delta u(s)dsdt \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\int_0^t x(r)^{tr}W(r)R(r)dr \right) \int_0^t R(s)^{-1}B(s)\delta u(s)dsdt. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)^{tr}W(t)\delta x(t)dt &= \int_0^T x(r)^{tr}W(r)R(r)dr \int_0^T R(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds \\ &\quad - \int_0^T \int_0^t x(r)^{tr}W(r)R(r)drR(t)^{-1}B(t)\delta u(t)dt. \end{aligned}$$

Reconociendo (3.8) y (3.9) en esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t)^{tr}W(t)\delta x(t)dt &= (-p(0)^{tr} - x(T)^{tr}QR(T)) \int_0^T R(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds \\ &\quad - \int_0^T (p(t)^{tr} - p(0)^{tr}R(t)^{-1})B(t)\delta u(t)dt \\ &= -x(T)^{tr}QR(T) \int_0^T R(s)^{-1}B(s)\delta u(s)ds - \int_0^T p(t)^{tr}B(t)\delta u(t)dt. \end{aligned}$$

De la identidad para $\delta x(\cdot)$, finalmente tenemos

$$\int_0^T x(t)^{tr}W(t)\delta x(t)dt = -x(T)^{tr}Q\delta x(T) - \int_0^T p(t)^{tr}B(t)\delta u(t)dt.$$

- Finalmente, combinando con la expresión de $\delta C(u)\delta u$:

$$\int_0^T (u(t)^{tr}U(t) - p(t)^{tr}B(t))\delta u(t)dt = 0, \quad \forall \delta u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m),$$

lo que permite concluir que $u(t)^{tr} = p(t)^{tr}B(t)U(t)^{-1}$.

Para la recíproca, invirtiendo el argumento se muestra que $\delta C(u)\delta u = 0, \forall \delta u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Como $C(u)$ es estrictamente convexa, se concluye que u es un mínimo. ■



- El resultado también es cierto si

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt,$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa de clase C^1 . En este caso:

$$p(T) = -\frac{1}{2} \nabla g(x(T))$$

Si g no es convexa, la condición es necesaria.

- Caso $T = +\infty$ y $g(x) \equiv 0$. La existencia de soluciones está garantizada por la Proposición 3.3.2. La caracterización del par óptimo $(x(t), u(t))$ en $[0, \infty)$ es análogo al caso $[0, T]$ cambiando $p(T)^{tr} = -x(T)Q$ por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$$

donde $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el vector adjunto.

- Sea $H(x, p, u) = p^{tr}(Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x^{tr}Wx + u^{tr}Uu)$.

Las ecuaciones del Principio del Máximo se escriben como

$$\begin{cases} x' = H_p = Ax + Bu, \\ (p')^{tr} = -H_x = -p^{tr}A + x^{tr}W, \\ H_u = 0 = p^{tr}B - u^{tr}U. \end{cases}$$

Se puede ver que se recupera el sistema de control, la ecuación adjunta y la expresión del control óptimo.

3.3.2 Función valor y ecuación matricial de Riccati

Sean $T > 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el problema LC asociado al sistema

$$(L) \begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(0) = z, \end{cases}$$

y al costo

$$C(u) = |x(T)|_Q^2 + \int_0^T (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt,$$

bajo los supuestos usuales de $A(t)$, $B(t)$, Q , $W(t)$ y $U(t)$.

Recordemos que bajo la hipótesis de coercividad:

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m), \int_0^T |u(t)|_U^2 dt \geq \alpha \int_0^T |u(t)|^2 dt, \quad (H)$$

para cada $T > 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$, este problema LC tiene una única solución $(x(t), u(t))$. Por lo tanto, podemos definir la **función valor** dada por:

$$S_T(z) = \min\{C(u) / x(0) = z\}.$$

El siguiente resultado establece que el control óptimo $u(t)$ se puede escribir como *ciclo cerrado* (control *feedback*):

$$u(t) = K(t)x(t),$$

donde $K(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Teorema 3.3.4 Asumamos la hipótesis de coercividad (H). Entonces, el control óptimo u del problema LC se escribe como

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t)x(t)$$

donde $E = E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es solución en $[0, T]$ de la **ecuación matricial de Riccati**:

$$(R) \begin{cases} E' = W - A^{tr}E - EA - EBU^{-1}B^{tr}E, \\ E(T) = -Q. \end{cases}$$

Además, $\forall t \in [0, T]$, $E(t)$ es simétrica y

$$S_T(z) = -z^{tr}E(0)z$$

Demostración. Por el Principio del Máximo LC (Teorema 3.3.3), tenemos que para cada $T > 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$, el par óptimo $(x(t), u(t))$ está dado por

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, & x(0) = z, \\ p^{tr} = -p^{tr}A + x^{tr}W, & p(T)^{tr} = -x(T)^{tr}Q, \\ u = U^{-1}B^{tr}p. \end{cases}$$

Supongamos que $p(t)$ se escribe como $p(t) = E(t)x(t)$, donde $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de forma que

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t)x(t).$$

Probemos que E es solución de (R). Sustituyendo en la ecuación de $p(t)$, tenemos que

$$E'x + Ex' = -A^{tr}Ex + Wx.$$

Usando la expresión de $u(t)$ en el sistema de $x(t)$, encontramos

$$x' = Ax + BU^{-1}B^{tr}Ex,$$

y sustituyendo en la identidad anterior obtenemos

$$E'x + EAx + EBU^{-1}B^{tr}Ex = -A^{tr}Ex + Wx.$$

Junto con $E(T)x(T) = p(T) = -Qx(T)$ se concluye que $E(t)$ es solución de (R). Además, como $U(t)$, $W(t)$ y Q son simétricas, $E(t)$ también lo es.

Inversamente, si $E(t)$ es solución de (R), se debe tener $p(t) = E(t)x(t)$. En efecto, sea $q(t) = E(t)y(t)$, donde

$$\begin{cases} y' = Ay + Bv, & y(0) = z, \\ v = U^{-1}B^{tr}Ey. \end{cases}$$

Entonces, como $q' = E'y + Ey$ y E es solución de (R), tenemos que

$$\begin{aligned} q' &= (W - A^{tr}E - EA - EBU^{-1}B^{tr}E)y + EAy + EA - EBU^{-1}B^{tr}Ey \\ &= -A^{tr}Ey + Wy. \end{aligned}$$

Además, $q(T) = E(T)y(T) = -Qy(T)$, con lo que $q(t)$ es solución de

$$\begin{cases} q' = -A^{tr}q + Wy, \\ q(T) = -Qy(T), \end{cases}$$

es decir, $(y(t), q(t), v(t))$ satisface las ecuaciones del Principio del Máximo LC. Por lo tanto, $(y(t), v(t))$ es un par óptimo. Por unicidad de la solución:

$$(y(t), v(t)) = (x(t), u(t)) \text{ y } q(t) = p(t).$$

En particular, $p(t) = E(t)x(t)$ y $u(t) = U^{-1}(t)B^{tr}(t)E(t)x(t)$.

Por otro lado, si $(x(t), u(t))$ es un par óptimo, se tiene $S_T(z) = C(u)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^{tr}Ex) &= \frac{d}{dt}(p^{tr}x) = p^{tr}x' + p'^{tr}x \\ &= -p^{tr}Ax + x^{tr}Wx + p'^{tr}Ax + p'^{tr}Bu \\ &= |x|_W^2 + |u|_U^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $p^{tr}B = u^{tr}U$. Integrando entre 0 y T , obtenemos

$$\begin{aligned} -z^{tr}E(0)z &= -x^{tr}(T)E(T)x(T) + \int_0^T (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt \\ &= x^{tr}(T)Qx(T) + \int_0^T (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt \\ &= C(u), \end{aligned}$$

de donde deducimos que $S_T(z) = -z^{tr}E(0)z$.

Para finalizar la demostración, necesitamos verificar que la solución de (R) está definida en todo $[0, T]$. Si no fuera el caso, existiría $\bar{t} \in (0, T)$ tal que

$$|E(t)| \rightarrow +\infty \text{ cuando } t \rightarrow \bar{t}^+.$$

En particular, $\forall \lambda > 0, \exists t_\lambda \in (\bar{t}, T], \exists x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ con $|x_\lambda| = 1$ tal que

$$|x_\lambda^{tr}E(t_\lambda)x_\lambda| > \lambda.$$

Ahora, consideremos el problema LC en $[t_\lambda, T]$. Sabemos que existe una única trayectoria $x(t)$ óptima caracterizada por

$$\begin{cases} x' = Ax + BU^{-1}B^{tr}p, & x(t_\lambda) = x_\lambda, \\ p' = -A^{tr}p + Wx, & p(T) = -Qx(T). \end{cases}$$

En este caso, el costo está dado por

$$C(u) = |x(T)|_Q^2 + \int_{t_\lambda}^T (|x(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt.$$

Como $E(t)$ está bien definido en $[t_\lambda, T]$, se tiene

$$S_{T-t_\lambda}(x_\lambda) = -x_\lambda^{tr}E(t_\lambda)x_\lambda.$$

Además,

$$S_{T-t_\lambda}(x_\lambda) \leq C(0) \leq c|x_\lambda|^2 = c,$$

donde la segunda desigualdad es consecuencia de la continuidad de $x(t)$ con respecto a la condición inicial x_λ y $c = c(A, B, Q, W, U)$ es una constante positiva (notar que c es independiente de x_λ). Entonces,

$$|-x_\lambda^T E(t_\lambda)x_\lambda| = S_{T-t_\lambda}(x_\lambda) \leq c.$$

Basta tomar $\lambda > c$ para llegar a una contradicción.

Esto finaliza la demostración del Teorema 3.3.4. ■

3.3.3 Aplicaciones de los problemas LC Problema de regulación o de persecución

Consideremos el problema lineal

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

y una trayectoria (arbitraria) $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, $\xi_0 = \xi(0)$.

El **problema de regulación o persecución** consiste en determinar un control u tal que la trayectoria $x(\cdot)$ siga lo mejor posible a $\xi(\cdot)$ (trayectoria de referencia).

Definamos el *error* sobre $[0, T]$: $z(t) := x(t) - \xi(t)$. Entonces, $z(\cdot)$ es solución de

$$\begin{cases} z' = A(t)z + B(t)u + r(t), \\ z(0) = x_0 - \xi_0, \end{cases}$$

donde

$$r(t) = A(t)\xi(t) - \xi'(t).$$

Parece razonable minimizar el error mediante el costo:

$$C(u) = |z(T)|_Q^2 + \int_0^T (|z(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt,$$

con Q , $W(t)$ y $U(t)$ matrices de ponderación.

Para reducir este problema a un sistema con $r \equiv 0$, definimos

$$\tilde{z}(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Entonces, tenemos que $\tilde{z}(\cdot)$ resuelve

$$\tilde{z}' = \tilde{A}(t)\tilde{z} + \tilde{B}(t)u, \quad \tilde{z}(0) = \begin{pmatrix} x_0 - \xi_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & r(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

y minimizamos el costo

$$C(u) = |\tilde{z}(T)|_Q^2 + \int_0^T (|\tilde{z}(t)|_W^2 + |u(t)|_U^2) dt,$$

donde

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{W}(t) = \begin{pmatrix} W(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, podemos aplicar los resultados anteriores (Teorema 3.3.4) a $\tilde{z}(\cdot)$, esto es, existe (un único) control óptimo que se escribe como:

$$u(t) = U^{-1} \tilde{B}(t) \tilde{E}(t) \tilde{z}(t),$$

donde \tilde{E} es solución de la ecuación de Riccati:

$$\begin{cases} \tilde{E}' = \tilde{W} - \tilde{A}^{tr} \tilde{E} - \tilde{E} \tilde{A} - \tilde{E} \tilde{B} U^{-1} \tilde{B}^{tr} \tilde{E}, \\ \tilde{E}(T) = -\tilde{Q}. \end{cases}$$

Si escribimos

$$\tilde{E}(t) = \begin{pmatrix} E(t) & h(t) \\ h(t)^{tr} & \alpha(t) \end{pmatrix}, \quad h(t) \in \mathbb{R}^n, \alpha(t) \in \mathbb{R},$$

vemos que $E(\cdot)$, $h(\cdot)$ y $\alpha(\cdot)$ es solución de

$$\begin{cases} E' = W - A^{tr} E - EA - EBU^{-1}B^{tr}E, & E(T) = -Q, \\ h' = -A^{tr}h - Er - EBU^{-1}B^{tr}h, & h(T) = 0, \\ \alpha' = -2r^{tr}h - h^{tr}BU^{-1}B^{tr}h, & \alpha(T) = 0. \end{cases}$$

Entonces, tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.3.5 Sea $\xi(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ una trayectoria sobre $[0, T]$ y consideremos el problema de regulación (o persecución) para el sistema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde se quiere minimizar el costo

$$C(u) = |x(T) - \xi(T)|_{\tilde{Q}}^2 + \int_0^T (|x(t) - \xi(t)|_{\tilde{W}}^2 + |u(t)|_{\tilde{U}}^2) dt.$$

Entonces, existe un único control óptimo que se escribe como

$$u(t) = U(t)^{-1} B(t)^{tr} E(t) (x(t) - \xi(t)) + U(t)^{-1} B(t)^{tr} h(t),$$

donde $E(t) \in \mathbb{R}^n$ y $h(t) \in \mathbb{R}^n$ son soluciones sobre $[0, T]$ de

$$\begin{cases} E' = W - A^{tr} E - EA - EBU^{-1}B^{tr}E, & E(T) = -Q, \\ h' = -A^{tr}h - E(A(t)\xi(t) - \xi'(t)) - EBU^{-1}B^{tr}h, & h(T) = 0. \end{cases}$$

Además, $E(t)$ es simétrica y el costo mínimo es

$$\begin{aligned} & - (x(0) - \xi(0))^{tr} E(0) (x(0) - \xi(0)) - 2h(0)^{tr} (x(0) - \xi(0)) \\ & - \int_0^T \left(2(A(t)\xi(t) - \xi'(t))^{tr} h(t) + h(t)^{tr} B(t) U(t)^{-1} B(t)^{tr} h(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Problema de persecución de una salida

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t)u, & x(0) = x_0, \\ y = C(t)x, \end{cases}$$

donde $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ($p < n$). Dada una trayectoria $\xi(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \in [0, T]$, buscamos un control u tal que la observación $y(t)$ sea cercano a $\xi(t)$.

Sea el error $z(t) := y(t) - \xi(t)$. Proponemos el costo a minimizar siguiente:

$$C(u) = |z(T)|_{\tilde{Q}}^2 + \int_0^T (|z(t)|_{\tilde{W}}^2 + |u(t)|_{\tilde{U}}^2) dt.$$

En este caso, consideremos la variable aumentada

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

y transformamos el problema en

$$\tilde{x}' = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u, \quad \tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C(u) = |\tilde{x}(T)|_{\tilde{Q}}^2 + \int_0^T (|\tilde{x}(t)|_{\tilde{W}}^2 + |u(t)|_{\tilde{U}}^2) dt,$$

donde

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} C(T)^{tr}QC(T) & -C(T)^{tr}Q\xi(T) \\ -\xi(T)^{tr}QC(T) & \xi(T)Q\xi(T) \end{pmatrix},$$

y

$$\tilde{W}(t) = \begin{pmatrix} C(t)^{tr}W(t)C(t) & -C(t)^{tr}W(t)\xi(t) \\ -\xi(t)^{tr}W(t)C(t) & \xi(t)^{tr}W(t)\xi(t) \end{pmatrix}.$$

De esta forma, el (único) control óptimo está dado por

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^{tr}E(t)x(t) + U(t)^{-1}B(t)^{tr}h(t),$$

donde $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h(t) \in \mathbb{R}^p$ son soluciones en $[0, T]$ de

$$\begin{cases} E' = C^{tr}WC - A^{tr}E - EA - EBU^{-1}B^{tr}E, & E(T) = -C(T)QC(T), \\ h' = -C^{tr}W\xi - A^{tr}h - EBU^{-1}B^{tr}h, & h(T) = C(T)Q\xi(T). \end{cases}$$

Además, $E(t)$ es simétrica y el costo mínimo es

$$-x(0)^{tr}E(0)x(0) - 2h(0)^{tr}x(0) - \alpha(0),$$

donde $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ es solución de

$$\alpha' = \xi^{tr}W\xi^{tr} - h^{tr}BU^{-1}B^{tr}h, \quad \alpha(T) = -\xi(T)^{tr}Q\xi(T).$$