UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Matemática

Apuntes de Clases

MAT-125: Introducción a la Matemática Avanzada
Versión diciembre 2021

Nicolás Carreño Godoy

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE CONJUNTOS Y FUNCIONES

1.1 Conjuntos

Definición 1.1. Un *conjunto* es una colección de objetos, llamados sus *elementos*.

La relación básica entre un objeto y un conjunto es de *pertenencia*:

- $x \in A$: "x pertenece a A"
- $x \notin A$: "x no pertenece a A"

Por lo general, un conjunto se define a partir de una *función proposicional* $p(x)$ sobre un **conjunto universal** E:

$$\forall x \in E, x \in A \iff p(x).$$

Por lo general, escribiremos:

$$A = \{x \in E \ / \ p(x)\}.$$

Definición 1.2 (**Conjunto vacío**)**.** Se define el *conjunto vacío* como un conjunto que no tiene elementos. Se denota como $\emptyset$.

$$\forall x \in E, x \in \emptyset \iff F,$$

o equivalentemente:

$$\forall x \in E, x \notin \emptyset.$$

Ejemplo: $\{x \ / \ x \neq x\} = \emptyset$.

Nota: A veces, por comodidad, omitiremos escribir "$x \in E$" cuando el contexto lo permita.

1.1.1 Relaciones entre conjuntos

- $A \subset B$: "A subconjunto de B" (también se anota $A \subseteq B$)

$$A \subset B \iff (\forall x, x \in A \implies x \in B).$$

Observación. Esta definición no excluye el caso $A = B$ (a pesar de la notación). Además:

$$\begin{aligned} A = B &\iff (\forall x, x \in A \iff x \in B) && \text{(por definición de } \subset) \\ &\iff \forall x, (x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A) && \text{(por propiedad de } \iff) \\ &\iff A \subset B \wedge B \subset A. && \text{(por definición de } \subset) \end{aligned}$$

Esta propiedad es muy útil para demostrar que dos conjuntos son iguales.

• Si $A \subset B$ y $A \neq B$, se dice que A es *subconjunto propio* o *estricto* de B. Cuando sea el caso y se quiera remarcar, lo anotaremos como $A \subsetneq B$.

La relación de inclusión $A \subset B$ es:

- **Reflexiva:** $A \subset A$, cualquier conjunto A.
- **Anti-simétrica:** $A \subset B \wedge B \subset A \implies A = B$.
- **Transitiva:** $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$.

Observación. Se dice que "$\subset$" es una **relación de orden parcial**.

Ejemplo: $\emptyset \subset A \subset E$, para todo $A \subset E$.
En efecto, como $\forall x, x \in \emptyset$ es falso, entonces

$$\forall x, x \in \emptyset \implies x \in A$$

es verdadero, es decir, $\emptyset \subset A$. Por otro lado, como $\forall x, x \in E$ es verdadero, entonces

$$\forall x, x \in A \implies x \in E$$

es verdadero, es decir, $A \subset E$.

Definición 1.3 (**Conjunto potencia**)**.** Dado $A \subset E$, se define $\mathcal{P}(A)$ como el *conjunto de las partes* o *conjunto potencia* de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subset E \ / \ X \subset A\}.$$

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A.$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces,

$$\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \emptyset, A\}.$$

Observación. Para todo conjunto A, se tiene que $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$, pues, por definición, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.

1.1.2 Operaciones entre conjuntos (o álgebra de conjuntos)

Definición 1.4 (**Unión**)**.** Se define la unión de A y B como el conjunto

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \vee x \in B\}$$

(se lee "A unión B").

$$\forall x, x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B.$$

Definición 1.5 (**Intersección**)**.** Se define la intersección de A y B como el conjunto

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \wedge x \in B\}$$

(se lee "A intersección B").

$$\forall x, x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B.$$

Observación. Si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son *disjuntos*.

Ejercicio: Probar que

$$X \subset Y \wedge W \subset Z \implies (X \cap W \subset Y \cap Z) \wedge (X \cup W \subset Y \cup Z)$$

Probemos que $X \subset Y \wedge W \subset Z \implies X \cap W \subset Y \cap Z$, es decir, asumamos que $X \subset Y \wedge W \subset Z$, y mostremos que $X \cap W \subset Y \cap Z$. Para esto, tomemos cualquier $x \in X \cap W$ y probemos que $x \in Y \cap Z$.
Notemos que

$$\begin{aligned} x \in X \cap W &\iff x \in X \wedge x \in W && \text{(por definición de } \subset) \\ &\implies x \in Y \wedge x \in Z && \text{(pues } X \subset Y \text{ y } W \subset Z) \\ &\iff x \in Y \cap Z, && \text{(por definición de } \subset) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.
Queda propuesto probar que $X \subset Y \wedge W \subset Z \implies X \cup W \subset Y \cup Z$.

Proposición 1.1. *Sean $A, B, C \subset E$, donde E es el conjunto universo. Entonces:*

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. $A \cup E = E$, $A \cap E = A$.
4. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(conmutatividad).*
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociatividad).*
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributividad).*

Ejercicio: Demostrar estas propiedades usando la definición de unión e intersección y las propiedades de conectivos lógicos.

Definición 1.6. (**Diferencia**) Se define la diferencia de A y B como el conjunto

$$A \backslash B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

(se lee "A menos B").

$$\forall x, x \in A \backslash B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

Definición 1.7 (Complemento (con respecto a E)). Se define el complemento de A como el conjunto

$$A^c = \{x / x \notin A\}$$

(se lee "Complemento de A" o "A complemento").

$$\forall x, x \in A^c \iff x \notin A.$$

Ejercicio: Probar que $A \backslash B = A \cap B^c$.

Proposición 1.2. *Sean $A, B \subset E$, donde E es el conjunto universo. Entonces:*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
2. $(A^c)^c = A$.
3. $A^c \cup A = E$, $A^c \cap A = \emptyset$.

Ejercicio: Probar estas propiedades.

Definición 1.8 (Producto cartesiano). El producto cartesiano entre A y B se define como el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}.$$

Observación. $(x, y) = (a, b) \iff x = a \wedge y = b$.

Ejercicio: Probar las siguientes propiedades:

1. $A \subset C \wedge B \subset D \implies A \times B \subset C \times D$.
2. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
3. $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

Preguntas:

1. En 1., ¿es cierta la recíproca?
   Sí. Pruébelo.
2. En 3., ¿es cierta la inclusión inversa?
   No es difícil construir un **contraejemplo**: Sean $A = B = \{a\}$ y $C = D = \{c\}$, donde $a \neq c$. Entonces:
   - $(A \times B) \cup (C \times D) = \{(a, a)\} \cup \{(c, c)\} = \{(a, a), (c, c)\}$.
   - $(A \cup C) \times (B \cup D) = \{a, c\} \times \{a, c\} = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c)\}$.

1.2 Funciones

Definición 1.9. Una tupla $f = (A, B, G)$ se dice *función* de A en B si

1. $G \subset A \times B$
2. $\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in G$

Observaciones.

- G se llama *grafo* de f. Se denota $\mathrm{Gr}(f)$.
- A se llama *dominio* de f. Se denota $\mathrm{dom}(f)$.
- B se llama *codominio* de f o *conjunto de llegada* de f. Se denota $\mathrm{cod}(f)$.
- Dado $(x, y) \in G$,
  - x se llama *preimagen* de y;
  - y se llama *imagen* de x.

Notación: Usualmente, una función de A en B se denota como $f : A \to B$. Más aún, por unicidad de la imagen, dado $x \in A$ denotamos $f(x)$ el único elemento en B tal que $(x, f(x)) \in G$. Así, tiene sentido la notación

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Con esta notación, tenemos que

$$f : A \to B \text{ es función} \iff \forall x \in A, \exists! y \in B, y = f(x).$$

Definición 1.10 (Igualdad de funciones:). Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. Decimos que f es igual a g si y solo si $A = C$, $B = D$ y $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Esto es,

$$f = g \iff \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g) \wedge \forall x \in A, f(x) = g(x).$$

Definición 1.11 (Inyectividad). Una función $f : A \to B$ se dice *inyectiva* (o 1-1) si:

$$\forall x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y),$$

o equivalentemente,

$$\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ejemplo: $A \subset B$, la **función inclusión**

$$\begin{aligned} i : A &\to B \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

es inyectiva.

Ejemplo: Una función de la forma $f : A \to \{y\}$ no es inyectiva, a menos que $A = \{x\}$ (es decir, que A sea un singleton).

Definición 1.12 (Sobreyectividad). Una función $f : A \to B$ se dice *sobreyectiva* (o *sobre*, o *epiyectiva*) si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

Ejemplo: Las **funciones proyección**

$$\begin{aligned} \pi_1 : A \times B &\to A \\ (x, y) &\mapsto \pi_1(x, y) = x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi_2 : A \times B &\to A \\ (x, y) &\mapsto \pi_2(x, y) = y \end{aligned}$$

son sobreyectivas.

Ejemplo: La función

$$\begin{aligned} f : A &\to \{y, z\} \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

no es sobreyectiva (a menos que $y = z$).

Definición 1.13 (Biyectividad). Una función $f : A \to B$ se dice *biyectiva* (o *biyección*) si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo: La **función identidad**

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : A &\to A \\ x &\mapsto \mathrm{id}(x) = x \end{aligned}$$

es biyectiva.

Observación.

$$f : A \to B \text{ es biyectiva} \iff \forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x).$$

Si $f : A \to B$ $(x \mapsto y = f(x))$ es biyectiva, se puede construir

$$\begin{aligned} g : B &\to A \\ y &\mapsto x = g(y), \end{aligned}$$

donde $y = f(x)$. Esto es

$$g(y) = x \iff f(x) = y.$$

Pregunta: ¿g es función?
Notemos que

$$\begin{aligned} f : A \to B \text{ biyectiva} &\iff \forall y \in B, \exists! x \in A f(x) = y, && \text{(por definición de biyectividad)} \\ &\iff \forall y \in B, \exists! x \in A, g(y) = x && \text{(por definición de } g\text{)} \\ &\iff g : B \to A \text{ es función} && \text{(por definición de función).} \end{aligned}$$

La respuesta es sí, y a $g : B \to A$ se le llama *función inversa* de f, se denota f^{-1} y está caracterizada por

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Definición 1.14. Una función $f : A \to B$ se dice *invertible* si tiene inversa.

Observación. Por la definición y construcción anteriores, tenemos

$$f : A \to B \text{ es invertible} \iff f \text{ es biyectiva}.$$

Ejercicio: Sea E conjunto universo, y sean $A, B \subset E$. Se define la función:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto f(X) = A \cap (B \cup X). \end{aligned}$$

Demuestre que:

1. Si $B \neq \emptyset$, entonces f no es inyectiva.
2. Si $A \neq E$, entonces f no es inyectiva.
3. Si $A \neq E$, entonces f no es sobreyectiva.

Solución:

1. Notemos que
$$f(\emptyset) = A \cap (B \cup \emptyset) = A \cap B$$
y
$$f(B) = A \cap (B \cup B) = A \cap B.$$
Como $B \neq \emptyset$ y $f(B) = f(\emptyset)$, se tiene que f no es inyectiva.
2. Notemos que
$$f(A) = A \cap (B \cup A) = A,$$
pues $A \subset B \cup A$, y
$$f(E) = A \cap (B \cup E) = A \cap E = A.$$
Como $A \neq E$ y $f(A) = f(E)$, se tiene que f no es inyectiva.
3. Basta encontrar $Y \subset E$ tal que $f(X) \neq Y$ para todo $X \subset E$. Notemos que para todo $X \subset E$, se tiene $A \cap (B \cup X) \subset A$ y $A \subsetneq E$. Entonces, basta tomar $Y = A^c$.

1.2.1 Conjunto imagen

Definición 1.15 (Conjunto imagen)**.** Sean $f : A \to B$ y $X \subset A$. Se define el *conjunto imagen* de X por f como
$$f(X) = \{y \in B \ / \ \exists x \in X, y = f(x)\},$$
o equivalentemente
$$f(X) = \{f(x) \ / \ x \in X\}.$$

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$. Entonces,
$$f(\{1, 2, 3\}) = \{2, 4, 6\}.$$

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$. Entonces,
$$f(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}.$$

Observación.

- $\forall y \in B,\ y \in f(X) \iff \exists x \in X, y = f(x)$.
- $\forall X \subset A, f(X) \subset B$.
- f sobreyectiva $\iff f(A) = B$.
- $f(A)$ se llama *imagen de* f. Se denota $\mathrm{Im}(f)$.

Proposición 1.3. *Sean $f : A \to B$, $X, Y \subset A$. Entonces:*

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

2. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ *(con igualdad si f es 1-1).*

3. $X \subset Y \implies f(X) \subset f(Y)$.

4. $f(\emptyset) = \emptyset$.

Demostración. 1. Sea $z \in f(X \cup Y)$. Por definición, existe $x \in X \cup Y$ tal que $z = f(x)$. Ahora, si $x \in X$, entonces $z \in f(X)$. Por otro lado, si $x \in Y$, entonces $z \in f(Y)$. Esto dice que $z \in f(X)$ o $z \in f(Y)$, es decir, $z \in f(X) \cup f(Y)$.

Sea $z \in f(X) \cup f(Y)$ y mostremos que existe $w \in X \cup Y$ tal que $z = f(w)$. Como $z \in f(X)$ o $z \in f(Y)$, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$ o existe $y \in Y$ tal que $z = f(y)$. Definamos

$$w = \begin{cases} x, & \text{si } z = f(x), \\ y, & \text{si } z = f(y) \text{ y } z \neq f(x). \end{cases}$$

Es claro que $w \in X \cup Y$ y que $z = f(w)$.

2. Sea $z \in f(X \cap Y)$. Por definición, existe $x \in X \cap Y$ tal que $z = f(x)$. Como $x \in X$ y $x \in Y$, entonces $z \in f(X)$ y $z \in f(Y)$, respectivamente, lo que dice que $z \in f(X) \cap f(Y)$.

Veamos la inclusión inversa. Sea $z \in f(X) \cap f(Y)$. Como $z \in f(X)$ y $z \in f(Y)$, podemos asegurar que

$$\exists x \in X, z = f(x) \wedge \exists y \in Y, z = f(y).$$

Notemos que no podemos asegurar que $x \in Y$ ni $y \in X$ para concluir que $z \in f(X \cap Y)$, salvo si f es inyectiva. En efecto, en este caso, como $z = f(x)$ y $z = f(y)$, tenemos que $f(x) = f(y)$, lo que implica que $x = y$. Entonces, $x \in X \cap Y$ y se concluye.

3. Sea $z \in f(X)$ y probemos que $z \in f(Y)$. Notemos que existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. Como $X \subset Y$, entonces $x \in Y$ y, por lo tanto, $z \in f(Y)$.

4. Directa de la definición de conjunto imagen. □

Observación. La inclusión de la propiedad *3.* es estricta si f no es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in A$ tales que $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$. Tomamos $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$, con lo que tenemos que $f(X \cap Y) = \emptyset$, pues $X \cap Y = \emptyset$, pero $f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\}$.

1.2.2 Conjunto preimagen

Definición 1.16 (Conjunto preimagen)**.** Sean $f : A \to B$ e $Y \subset B$. Se define el *conjunto preimagen* de Y por f como

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}.$$

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$. Entonces,

$$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{1\}.$$

Además, notemos que $f(f^{-1}(\{1, 2, 3\})) \neq \{1, 2, 3\}$.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$. Entonces,

$$f^{-1}(\{0, 1, 4\}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Además, notemos que $f^{-1}(f(\{-1, 0, 1, 2\})) \neq \{-1, 0, 1, 2\}$.

Observación.

- $\forall x \in A,\ x \in f^{-1}(Y) \iff f(x) \in Y$.
- $\forall Y \subset B,\ f^{-1}(Y) \subset A$.
- Puede pasar que $f^{-1}(Y) = \emptyset$ (en particular, si f no es sobre).

Proposición 1.4. *Sean $f : A \to B$, $X, Y \subset B$. Entonces:*

1. $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

2. $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

3. $X \subset Y \implies f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.

4. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Demostración. *1.* Notemos que

$$\begin{array}{rcll} x \in f^{-1}(X \cup Y) & \iff & f(x) \in X \cup Y & \text{(por definición de preimagen)} \\ & \iff & f(x) \in X \vee f(x) \in Y & \text{(por definición de } \cup\text{)} \\ & \iff & x \in f^{-1}(X) \vee x \in f^{-1}(Y) & \text{(por definición de preimagen)} \\ & \iff & x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) & \text{(por definición de } \cup\text{),} \end{array}$$

lo que demuestra la propiedad.

2. Completamente análoga a *1.*.

3. Sea $x \in f^{-1}(X)$ y mostremos que $x \in f^{-1}(Y)$. Como, por definición, $f(x) \in X$ y $X \subset Y$, entonces $f(x) \in Y$, es decir, $x \in f^{-1}(Y)$.

4. Directo de la definición de conjunto preimagen. □

Proposición 1.5. *Sea $f : A \to B$, $X \subset A$, $Y \subset B$. Se tiene:*

1. $X \subset f^{-1}(f(X))$ *(con igualdad si f es 1-1).*

2. $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ *(con igualdad si f es sobre).*

Ejercicio: Demostrar estas propiedades.

1.2.3 Composición de funciones

Definición 1.17. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones. Se define la función $g \circ f : A \to C$, llamada *composición de f y g*, como

$$\forall x \in A,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n + 3$. Entonces, $g \circ f$ es la función

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = 2n + 3.$$

Por otro lado, $f \circ g$ es la función

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n + 3) = 2(n + 3) = 2n + 6.$$

En particular, la composición de funciones no es conmutativa.

Observación.

- En realidad, basta tener $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ para que $g \circ f$ esté bien definida.
- Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, se tiene $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (asociatividad). En efecto, sea $x \in A$. Por definición:

$$\begin{array}{rcl} ((h \circ g) \circ f)(x) & = & (h \circ g)(f(x)) \\ & = & h(g(f(x))) \\ & = & h((g \circ f)(x)) \\ & = & (h \circ (g \circ f))(x). \end{array}$$

Proposición 1.6. *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, o bien, tales que $Im(f) \subset dom(g)$. Entonces:*

1. *f y g son 1-1 $\implies$ $g \circ f$ es 1-1.*

2. *f y g son sobre $\implies$ $g \circ f$ es sobre.*

3. *f y g son biyectivas $\implies$ $g \circ f$ es biyectiva.*
4. *$g \circ f$ es 1-1 $\implies$ f es 1-1.*
5. *$g \circ f$ es sobre $\implies$ g es sobre.*

   Si $X \subset A$, $Z \subset C$:

6. *$(g \circ f)(X) = g(f(X))$.*
7. *$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.*

Demostración. 1. Sean $x, y \in A$ tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Probemos que $x = y$. Por definición, tenemos $g(f(x)) = g(f(y))$. Como g es 1-1, entonces $f(x) = f(y)$, lo que a su vez implica que $x = y$, por la inyectividad de f.

2. Sea $z \in C$. Mostremos que existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Como g es sobre, entonces existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$, y como f es sobre, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Este es el elemento buscado, pues $g(f(x)) = g(y) = z$.

3. Consecuencia directa de *1.* y *2.*.

4. Sean $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces, $g(f(x)) = g(f(y))$, es decir, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Como $g \circ f$ es 1-1, tenemos $x = y$.

5. Sea $z \in C$. Mostremos que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. De la sobreyectividad de $g \circ f$, obtenemos la existencia de $x \in A$ tal que $g(f(x)) = z$. Basta tomar $y = f(x) \in B$ para concluir.

6. Sea $z \in (g \circ f)(X)$. Tenemos que existe $x \in X$ tal que $z = g(f(x))$. Como $f(x) \in f(X)$, se tiene que $z \in g(f(X))$.
Sea $z \in g(f(X))$. Tenemos que existe $y \in f(X)$ tal que $z = g(y)$. Por otro lado, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Entonces, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, con $x \in X$, lo que implica que $z \in (g \circ f)(X)$.

7. Notemos que

$$\begin{array}{rcll} x \in (g \circ f)^{-1}(Z) & \iff & (g \circ f)(x) \in Z & \text{(por definición de preimagen)} \\ & \iff & g(f(x)) \in Z & \text{(por definición de composición)} \\ & \iff & f(x) \in g^{-1}(Z) & \text{(por definición de preimagen)} \\ & \iff & x \in f^{-1}(g^{-1}(Z)) & \text{(por definición de preimagen),} \end{array}$$

lo que demuestra la propiedad. □

1.3 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Usando tablas de verdad, demuestre las propiedades de asociatividad y distributividad de los conectivos lógicos $\wedge$ and $\vee$, es decir, si p, q y r son proposiciones cualesquiera, demostrar

(a) $p \wedge (q \wedge r) \iff (p \wedge q) \wedge r$.

(b) $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$.

(c) $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(d) $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Ejercicio 1.2. Sin usar tablas de verdad, pruebe que las siguientes proposiciones son tautologías:

(a) $\big(p \vee q \iff p \wedge r\big) \implies \big((q \implies p) \wedge (p \implies r)\big)$.

(b) $(p \implies \bar{q}) \wedge (r \implies q) \implies (p \implies \bar{r})$.

(c) $\big((p \implies \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r\big) \implies \bar{p}$.

Ejercicio 1.3. Se define el conectivo lógico $|$ como $p|q \iff \bar{p} \vee \bar{q}$. Escriba usando sólo el conectivo $|$, proposiciones equivalentes a las siguientes:

(a) $\bar{p}$.

(b) $p \vee q$.

(c) $p \wedge q$.

Ejercicio 1.4. Sean las proposiciones r y s siguientes:

$r : (\forall x)(p(x) \implies q)$.

$s : \big(\forall x, p(x)\big) \implies q$.

(a) Niegue la proposición r.

(b) Niegue la proposición s.

(c) De las dos implicancias, $(r \implies s)$ y $(s \implies r)$, determine la que corresponde a una tautología. Por supuesto, justifique su elección.

Ejercicio 1.5. Pruebe las siguientes propiedades de la unión y la intersección de conjuntos usando las definiciones dadas en clases (sin dibujos):

- $A \cup A = A$.
- $A \cup E = E$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cup B = A \iff B \subset A$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cap A = A$.
- $A \cap E = A$.
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cap B = A \iff A \subset B$.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ejercicio 1.6. Pruebe las siguientes propiedades usando las definiciones dadas en clases (sin dibujos):

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $(A^c)^c = A$.
- $A \cup A^c = E$.
- $A \cap A^c = \emptyset$.
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
- $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Ejercicio 1.7. Sean A, B, W conjuntos tales que $(A \cap W) \subset (B \cap W)$ y $(A \cap W^c) \subset (B \cap W^c)$. Demuestre que $A \subset B$.

Ejercicio 1.8. Sean A y B conjuntos. Demuestre que $\big((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = B\big) \implies \big(A = \emptyset\big)$.

Ejercicio 1.9. Sean X, Y, Z conjuntos no vacíos. Sea las funciones $s : X \to Y$, $t : Y \to Z$. Demuestre que:

(a) $(t \circ s)$ sobreyectiva $\implies$ t sobreyectiva.

(b) $(t \circ s)$ inyectiva $\implies$ s inyectiva.

(c) $(t \circ s)$ sobreyectiva $\wedge$ t biyectiva $\implies$ s sobreyectiva.

Hint: Puede usar el hecho de que la inversa de una función biyectiva es biyectiva y que la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva.

(d) $(t \circ s)$ inyectiva $\wedge$ s biyectiva $\implies$ t inyectiva.

Ejercicio 1.10. Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Sean las funciones $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to A$, tales que $(f \circ g \circ h)$ es inyectiva, $(g \circ h \circ f)$ es inyectiva, y $(h \circ f \circ g)$ es sobreyectiva. Demuestre que las tres funciones f, g, y h son biyectivas.

Hint: Puede ser útil usar los resultados de la pregunta anterior.

Ejercicio 1.11. Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Sean las funciones $f : A \to B$, $g : B \to C$.

(a) Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es invertible. Además, muestre que se cumple $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(b) Demuestre mediante un contraejemplo que la inversa no es cierta, es decir, que si $g \circ f : A \to C$ es invertible, entonces no necesariamente f y g lo son.

Ejercicio 1.12. Sea E conjunto universo. Sea $A \subset E$ tal que $A \neq E$. Estudie la inyectividad y la sobreyectividad de la función f definida como:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(A) \\ X &\mapsto f(X) = X \cap A. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.13. Sea $f : A \to B$ una función.

1. Demuestre que:

   (a) $\forall X \subset A,\ X \subset f^{-1}(f(X))$.

   (b) $\forall Y \subset B,\ f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

   Muestre, mediante un ejemplo concreto, que la inclusión puede ser estricta.

2. Demuestre que:

   (a) $\forall X \subset A,\ X = f^{-1}(f(X)) \iff f$ es inyectiva.

   (b) $\forall Y \subset B,\ f(f^{-1}(Y)) = Y \iff f$ es sobreyectiva.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS NATURALES, CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

2.1 Números Naturales

Sea $\mathbb{N}$ un conjunto no vacío y $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función.

Suponemos que s satisface los siguientes axiomas:

1. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva: $\forall m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \implies m = n$.
2. $\exists! 1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n), \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Si $X \subset \mathbb{N}$ es tal que $1 \in X$ y $s(X) \subset X$, entonces $X = \mathbb{N}$.

Observación.

- Los axiomas anteriores se llaman *Axiomas de Peano*.
- Los elementos de $\mathbb{N}$ se llaman *Números Naturales*.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $s(n)$ se llama *sucesor de n*.
- La propiedad 2. dice que todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ es sucesor de algún $m \in \mathbb{N}$.
- La propiedad 3. se llama *Principio de inducción.* Además, como

  $$s(X) \subset X \iff (\forall n \in \mathbb{N}, n \in X \implies s(n) \in X),$$

  se puede enunciar como

  Si $X \subset \mathbb{N}$ es tal que $1 \in X$ y $\forall n \in \mathbb{N}, n \in X \implies s(n) \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.

El Principio de inducción también se puede enunciar como:

Sea $p(n)$ una función proposicional sobre $\mathbb{N}$:

$$\boxed{p(1) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N},\ p(n) \implies p(s(n))\big) \implies \forall n \in \mathbb{N}, p(n)}$$

En la práctica, para demostrar que $p(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$, se considera el conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ p(n)\}$ y se prueba que:

1. $1 \in X$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in X \implies s(n) \in X$.

Ejemplo: $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \neq n$.
En efecto, sea $X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ s(n) \neq n\}$ y mostremos que $X = \mathbb{N}$.
Por el axioma 2, $1 \neq s(1)$, por lo que $1 \in X$.
Sea $n \in X$. Por definición de X, $s(n) \neq n$. Como s es inyectiva (axioma 2), tenemos $s(s(n)) \neq s(n)$, es decir, $s(n) \in X$. Por el Principio de inducción (axioma 3), concluimos que $X = \mathbb{N}$.

2.1.1 Adición y multiplicación en $\mathbb{N}$

Definición. Se definen las operaciones $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante:

$$\begin{aligned} m + 1 &= s(m) \\ m + s(n) &= s(m+n) \\ m \cdot 1 &= m \\ m \cdot s(n) &= m \cdot n + m \end{aligned}$$

Observación.

- La definición anterior nos permite escribir "$n+1$" en lugar de $s(n)$.
- La segunda igualdad dice: Conociendo $m+n$, podemos conocer $m + (n+1) = (m+n) + 1$.
- La cuarta igualdad dice: Conociendo $m \cdot n$, podemos conocer $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$.
- En general, omitiremos el "$\cdot$" : $m \cdot n = mn$.

Proposición 2.1. *$\forall m, n, p \in \mathbb{N}$, se tiene:*

1. *Asociatividad: $(m+n)+p = m+(n+p)$, $m(np) = (mn)p$.*
2. *Conmutatividad: $m+n = n+m$, $mn = nm$.*
3. *Distributividad: $m(n+p) = mn + mp$.*
4. *Ley de cancelación o corte: $n + m = p + m \implies n = p$, $nm = pm \implies n = p$.*

Demostración.

1. Probemos la propiedad para $+$ usando el Principio de inducción. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y
$$X = \{p \in \mathbb{N} \ / \ (m+n)+p = m+(n+p)\}.$$
Por definición de $+$, tenemos que $m + (n+1) = (m+n)+1$, es decir, $1 \in X$.
Sea $p \in X$. Tenemos que
$$\begin{array}{rcll} (m+n)+s(p) & = & s((m+n)+p) & \text{(por definición de } +) \\ & = & s(m+(n+p)) & \text{(pues } p \in X) \\ & = & m + s(n+p) & \text{(por definición de } +) \\ & = & m + (n + s(p)) & \text{(por definición de } +), \end{array}$$
lo que implica que $s(p) \in X$.
Entonces, por el Principio de inducción, $X = \mathbb{N}$.
2. Propuesto (ver Guía 2).
3. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y
$$X = \{p \in \mathbb{N} \ / \ m(n+p) = mn + mp\}.$$
Notemos que $1 \in X$, pues
$$\begin{array}{rcll} m(n+1) & = & ms(n) & \text{(por definición de } +) \\ & = & mn + m & \text{(por definición de } \cdot) \\ & = & m \cdot n + m \cdot 1 & \text{(por definición de } \cdot). \end{array}$$
Sea $p \in X$. Tenemos que
$$\begin{array}{rcll} m(n+s(p)) & = & ms(n+p) & \text{(por definición de } +) \\ & = & m(n+p)+m & \text{(por definición de } \cdot) \\ & = & (mn+mp)+m & \text{(pues } p \in X) \\ & = & mn + (mp + m) & \text{(por asociatividad de } +) \\ & = & mn + ms(p) & \text{(por definición de } \cdot), \end{array}$$
lo que implica que $s(p) \in X$.
Entonces, por el Principio de inducción, $X = \mathbb{N}$.

4. Probemos la propiedad para $+$. Sean $n, p \in \mathbb{N}$ y

$$X = \{m \in \mathbb{N} \;/\; n + m = p + m \implies n = p\}.$$

Supongamos primero que $n + 1 = p + 1$, lo que es equivalente a $s(n) = s(p)$. Por la inyectividad de s, se tiene que $n = p$. Esto dice que $1 \in X$.

Sea $m \in X$ y supongamos que $n+s(m) = p+s(m)$. Por la definición de $+$, tenemos $s(n+m) = s(p+m)$, lo que implica que $n + m = p + m$, por la inyectividad de s. Como $m \in X$, se tiene que $n = p$ y, por lo tanto, $s(m) \in X$.

Entonces, por el Principio de inducción, $X = \mathbb{N}$.

□

2.1.2 Relación de orden en $\mathbb{N}$

Definición 2.1. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, decimos que m es menor que n (se denota $m < n$) si $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Analogamente, decimos que m es mayor que n (se denota $m > n$) si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$.

Observación. $m < n \iff n > m$.

Notación:

$$m \leq n \iff m < n \;\lor\; m = n,$$

$$m \geq n \iff m > n \;\lor\; m = n.$$

$m \leq n$ se lee "m menor o igual que n" y $m \geq n$ se lee "m es mayor o igual que n".

Lema 2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. $n < s(n)$.
2. $1 \leq n$.
3. *No existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$.*

Demostración. 1. Basta notar que $s(n) = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Si $n = 1$ es evidente. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Del axioma 2, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(m)$. Entonces, $n = m + 1$, lo que implica que $1 < n$.

3. Procedamos por contradicción (o reducción al absurdo). Supongamos que existen $n, p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n + 1$. Esto asegura la existencia de $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 = p + q$ y $p = n + r$. Entonces, $n + 1 = n + r + q$. Por la Ley de cancelación o de corte, obtenemos $1 = r + q$, lo que contradice el punto anterior.

□

Observación. Si denotamos: $2 := s(1)$, $3 := s(2) = s(s(1))$, $4 := s(3) = s(s(2)) = s(s(s(1)))$, ..., gracias al Lema 2.2 podemos ordenar los Números Naturales como:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$$

Proposición 2.3. *La relación definida arriba tiene las siguientes propiedades:*

1. *Transitividad:* $m < n \land n < p \implies m < p$.
2. *Tricotomía: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sólo ocurre una de las siguientes alternativas:*

$$m = n, \; m < n, \, o \;\; m > n.$$

3. *Monotonía:* $m < n \implies \forall p \in \mathbb{N}, m + p < n + p \;\land\; mp < np$.

Demostración. 1. Como $m < n$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. Asimismo, como $n < p$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $p = n + r$. Entonces,

$$p = n + r = (m + q) + r = m + (q + r).$$

Sea $t = q + r \in \mathbb{N}$. Como $p = m + t$, entonces $m < p$.

2. Propuesto. **Hint:** Probar primero que a lo más una de las proposiciones puede ser cierta. Luego, usando el Principio de inducción sobre n y m fijo, probar que al menos una de las proposiciones es cierta.

3. Sea $p \in \mathbb{N}$. Como $m < n$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$. Entonces,

$$n + p = (m + q) + p = m + (q + p) = m + (p + q) = (m + p) + q,$$

lo que muestra que $m + p < n + p$.

Análogamente, se prueba que $mp < np$.

□

2.1.3 Principio de Buen Ordenamiento (PBO)

Proposición 2.4 (PBO)**.** *Todo subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{N}$ posee un elemento mínimo, es decir, $\exists p \in A, \forall n \in A, p \leq n$.*

Demostración. Primero notemos que si $1 \in A$, la prueba termina, pues 1 sería el elemento mínimo (por Lema 2.2).

Supongamos que $1 \notin A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$I_n = \{m \in \mathbb{N} \ / \ m \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ I_n \subset \mathbb{N} \setminus A\}$. Como $1 \notin A$, entonces $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} \setminus A$, es decir, $1 \in X$.

Ahora, notemos que $X \neq \mathbb{N}$, pues $A \neq \emptyset$. En efecto, si $n \in A$, entonces $I_n \not\subset \mathbb{N} \setminus A$. Por lo tanto, $n \notin X$. Por el Principio de inducción, debe existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \in X$ y $p+1 \notin X$. Visto de otra forma, $I_p \subset \mathbb{N} \setminus A$ y $p + 1 \in A$. Entonces, para todo $m \leq p$ se tiene $m \notin A$. Además, gracias al Lema 2.2 no existe $q \in A$ tal que $p < q < p + 1$. Concluimos que $p + 1$ es el elemento mínimo de A. □

Como consecuencia del PBO, tenemos

Proposición 2.5 (Segundo Principio de Inducción)**.** *Sea $X \subset \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ satisface la siguiente propiedad:*

$$(\forall m < n, m \in X) \implies n \in X.$$

Entonces $X = \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $Y = \mathbb{N} \setminus X$ y mostremos que $Y = \emptyset$. Por contradicción, si $Y \neq \emptyset$, por el PBO, existe $n \in Y$ elemento mínimo. Entonces, para todo $m < n$, se tiene $m \in X$ ($m \notin Y$). Como X satisface la propiedad, obtenemos $n \in X$, lo que es una contradicción con $n \in Y$. □

2.2 Conjuntos finitos

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = \{m \in \mathbb{N} \ / \ m \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 2.2 (Conjunto finito)**.** Un conjunto X se dice *finito* si es vacío o si $\exists f : I_n \to X$ biyección, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Observación.

- La función f se llama "*conteo*" de X, pues podemos escribir

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n),$$

es decir, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Este $n \in \mathbb{N}$ se llama "*número de elementos*" o "*cardinal*" de X. Lo denotamos como $n = |X|$ o $n = \text{card}(X)$.

Ejemplo. Sean a, b, c objetos distintos entre sí. El conjunto $X = \{a, b, c\}$ es finito y $|X| = 3$. En efecto, podemos definir una biyección $f : I_3 \to X$ como: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.

Ejemplo. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es finito. En efecto, supongamos por contradicción que existe $f : I_n \to \mathbb{N}$ biyectiva, para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $M = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \in \mathbb{N}$. Tenemos que $f(i) \leq M$ para todo $i \in I_n$, pero entonces $M + 1 \in \mathbb{N}$ no tiene preimagen por f, lo que contradice que f es una biyección.

Pregunta. Este número $n = \text{card}(X)$: ¿Está bien definido? En otras palabras, ¿depende de la biyección f?

Teorema 2.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A \subset I_n$ tal que $A \neq I_n$. Entonces, no puede existir $f : A \to I_n$ biyectiva.*

Demostración. Notemos que si $A = \emptyset$, entonces el resultado es evidente, por lo que asumiremos que $A \neq \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que existe $f : A \to I_n$ biyectiva para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \exists A \subsetneq I_n \wedge \exists f : A \to I_n \text{ biyectiva}\}$. Por nuestro supuesto, $X \neq \emptyset$. Entonces, por el Principio de buen ordenamiento, X tiene un elemento mínimo $p \in X$ $(p > 1)$.

Sean $f_p : A \to I_p$ biyectiva, donde $A \subsetneq I_p$, y $a \in A$ tal que $p = f_p(a)$. Definamos la función

$$\begin{aligned} g : A \setminus \{a\} &\to I_{p-1} \\ x &\mapsto g(x) = f_p(x). \end{aligned}$$

Es fácil ver que g es una biyección. Por lo tanto, $p-1 \in X$, lo que es una contradicción, pues p es el elemento mínimo de X. □

Observación. En la prueba anterior, "$p - 1$" denota el único $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = s(n)$.

Corolario 2.7. *Si $f : I_m \to X$ y $g : I_n \to X$ son biyectivas, entonces $m = n$.*

Observación. Esto dice que si X es finito, entonces $|X|$ no depende de la biyección y, por lo tanto, está bien definido.

Demostración. Por contradicción, supongamos sin pérdida de generalidad que $m < n$ (el caso $n < m$ es análogo). Notemos que $g^{-1} \circ f : I_m \to I_n$ es una biyección, por ser composición de funciones biyectivas. Como $I_m \subsetneq I_n$, esto contradice el Teorema 2.6. □

Corolario 2.8. *Sea X conjunto finito y sea $Y \subset X$ tal que $Y \neq X$. Entonces, no puede existir $f : Y \to X$ biyectiva.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe $f : Y \to X$ biyectiva. Como X es finito, existe $g : I_n \to X$ biyectiva, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A = g^{-1}(Y)$ (la preimagen de Y por g). Se tiene que $A \subsetneq I_n$, pues g es biyectiva. Para encontrar la contradicción, construyamos una biyección entre A e I_n.

Sea $g_A : A \to Y$ definida como $g_A(x) = g(x)$, para todo $x \in A$. Es claro que g_A es biyectiva. Entonces, $h := g^{-1} \circ f \circ g_A$ es una biyección entre A e I_n, contradiciendo el Teorema 2.6. □

2.2.1 Subconjuntos de conjuntos finitos

Lema 2.9. *Sea X finito tal que $|X| = n$ y sea $a \in X$. Entonces, $X \setminus \{a\}$ es finito y $|X \setminus \{a\}| = n - 1$.*

Demostración. Sean $f : I_n \to X$ biyectiva, $m = f^{-1}(a)$ y $b = f(n)$. Definamos la función $g : I_n \to X$ como

$$g(x) = \begin{cases} a, & x = n, \\ b, & x = m, \\ f(x), & x \neq n \wedge x \neq m. \end{cases}$$

Notemos que g es biyectiva. Ahora, si $|X| = 1$, entonces $X \setminus \{a\} = \emptyset$, el cual es finito por definición.

Si $|X| = n > 1$, entonces la función

$$g\big|_{I_{n-1}} : I_{n-1} \to X \setminus \{a\}$$
$$x \mapsto g(x)$$

es biyectiva, donde $g\big|_{I_{n-1}}$ denota la restricción de g al conjunto I_{n-1}.

Así, $X \setminus \{a\}$ es finito y $|X \setminus \{a\}| = n - 1$. □

Teorema 2.10. *Sea X finito y sea $Y \subset X$. Entonces, Y es finito y $|Y| \leq |X|$, con igualdad solo si $Y = X$. (Todo subconjunto de un conjunto finito es finito).*

Demostración. Haremos inducción sobre $n = |X|$.

Si $|X| = 1$, los subconjuntos de X son X y $\emptyset$, los cuales son finitos.

Supongamos que $|X| = n + 1$ y que el resultado es cierto para todo conjunto finito de cardinal n. Para cualquier $Y \subset X$, distinguimos dos casos:

1. $Y = X$ y no hay nada que probar.

2. $Y \subsetneq X$. En este caso, sea $a \in X \setminus Y$. Como $Y \subset X \setminus \{a\}$ y $|X \setminus \{a\}| = n$ (por el Lema 2.9), se concluye que Y es finito y $|Y| \leq n < n + 1 = |X|$ gracias a la hipótesis inductiva.

En el caso que $|Y| = |X|$, se puede construir una biyección entre Y y X (¿cómo?), lo cual solo es posible si $Y = X$ por el Corolario 2.8. □

Corolario 2.11. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces:*

1. *Y finito y f inyectiva $\implies$ X finito y $|X| \leq |Y|$.*

2. *X finito y f sobreyectiva $\implies$ Y finito y $|Y| \leq |X|$.*

Demostración. 1. Como $f(X) \subset Y$ e Y es finito, por el Teorema 2.10 tenemos que $f(X)$ es finito y $|f(X)| \leq |Y|$. Por otro lado, como f es inyectiva, entonces $f : X \to f(X)$ es biyectiva y, por lo tanto, X es finito con $|X| = |f(X)| \leq |Y|$.

2. Como f es sobreyectiva, $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$, $y = f(x)$. Esto permite definir una función como

$$g : Y \to X$$
$$y \mapsto g(y) = x,$$

donde x es una preimagen de y por f, es decir, algún elemento de $f^{-1}(\{y\})$.

La función g definida de esta forma es inyectiva. En efecto, dados $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$, entonces las preimágenes escogidas no pueden coincidir, pues

$$f^{-1}(\{y_1\}) \cap f^{-1}(\{y_2\}) = f^{-1}(\{y_1\} \cap \{y_2\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Entonces, como X es finito, basta aplicar el punto anterior a la función g.

□

Corolario 2.12. *$X \subset \mathbb{N}$ es finito $\iff$ X es acotado ($\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in X, x \leq p$).*

Demostración. Demostraremos la doble implicacia.

($\implies$) Si $X \subset \mathbb{N}$ es finito, se puede escribir como $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar

$$p = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in \mathbb{N}$$

para tener $x_i \leq p$, $\forall i \in I_n$.

($\impliedby$) Sea $p \in \mathbb{N}, \forall x \in X, x \leq p$. Entonces, $X \subset I_p$. Por el Teorema 2.10, X es finito. □

2.3 Conjuntos infinitos

Definición 2.3 (Conjunto infinito)**.** Un conjunto X se dice *infinito* si no es finito.

Observación. X infinito $\iff$ $X \neq \emptyset \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N}, \nexists f : I_n \to X$ biyectiva.

Ejemplo. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es infinito. (Demostrado en la Sección 2.2)

Teorema 2.13. *Si X es infinito, entonces existe $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva.*

Demostración. Construiremos una función $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva inductivamente.

Primero, como $X \neq \emptyset$, tomamos $x_1 \in X$ cualquiera y definimos $f(1) := x_1$.

Ahora, supongamos que ya hemos definido $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ tales que son uno a uno distintos, es decir, $f(i) \neq f(j)$ para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $i \neq j$.

Como X es infinito, entonces $X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\} \neq \emptyset$ y, por lo tanto, existe un elemento $x_{n+1} \in X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$. Definimos $f(n+1) := x_{n+1}$.

La función $f : \mathbb{N} \to X$ definida de esta forma es inyectiva. En efecto, sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \neq n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m < n$. Entonces,

$$f(m) \in \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$$

y

$$f(n) \in X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}.$$

En particular, $f(m) \neq f(n)$, lo que prueba la inyectividad de f. $\square$

Observación. Intuitivamente, el Teorema 2.13 dice que $\mathbb{N}$ es el conjunto infinito "más pequeño en cuanto a cantidad de elementos".

El siguiente resultado entrega una caracterización interesante de los conjuntos infinitos, el cual dice que es posible tener una biyección entre un conjunto y una parte propia del mismo, lo que no puede pasar con los conjuntos finitos (ver Corolario 2.8).

Ejemplo. Sabemos que $\mathbb{N}$ es infinito y $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subsetneq \mathbb{N}$. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ dada por $f(n) = n + 1$ es claramente biyectiva.

Corolario 2.14. *X es infinito $\iff$ $\exists Y \subsetneq X$ tal que $\exists f : X \to Y$ biyectiva.*

Demostración. Demostremos la doble implicancia.

($\Longleftarrow$) Por el Corolario 2.8, la propiedad:

$$\exists Y \subsetneq X \text{ tal que } \exists f : X \to Y \text{ biyectiva}$$

no puede ser cierta si X es finito.

($\Longrightarrow$) Sea X infinito y $g : \mathbb{N} \to X$ una función inyectiva dada por el Teorema 2.13. Construiremos un conjunto $Y \subsetneq X$ y una función $f : X \to Y$ biyectiva.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $x_n = g(n) \in X$. Observemos que por la inyectividad de g, $x_m \neq x_n$ si $m \neq n$. Definamos

$$Y := X \setminus \{x_1\} \subsetneq X$$

y $f : X \to Y$ como

$$f(x) := \begin{cases} x_{n+1}, & \text{si } x = x_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{si } x \neq x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

No es difícil verificar que f es una función biyectiva (ejercicio). $\square$

Observación. En general, la existencia de una biyección entre dos conjuntos nos da la noción de que tienen la "misma cantidad de elementos", así como se definió para conjuntos finitos. Sin embargo, la intuición puede fallar al trabajar con conjuntos infinitos.

Consideremos $P, I \subset \mathbb{N}$ los conjuntos de los números naturales pares e impares, respectivamente, dados por

$$P := \{2n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

e

$$I := \{2n-1 \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Las funciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & P \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{N} & \to & I \\ n & \mapsto & 2n-1 \end{array}$$

son biyectivas, por lo tanto, al menos intuitivamente, los conjuntos P e I tienen la misma cantidad de elementos que $\mathbb{N}$. Sin embargo, observemos que $\mathbb{N} \setminus P = I$ y $\mathbb{N} \setminus I = P$ son infinitos.

Por otro lado, la función

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{N} & \to & \{2, 3, 4, 5, \dots\} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

también es biyectiva, es decir, $\{2, 3, 4, 5, \dots\}$ tiene la misma cantidad de elementos que $\mathbb{N}$, pero $\mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4, 5, \dots\} = \{1\}$ es finito.

2.4 Conjuntos numerables

Definición 2.4 (Conjunto numerable)**.** Un conjunto X se dice *numerable* si es finito o si existe $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva.

Observación. 1. Si X es numerable e infinito, se dice *infinito numerable.*

2. En algunos textos, se dice que:
   - X es *numerable* si X es infinito y numerable.
   - X es *a lo más numerable* si X es finito o infinito numerable.

3. La biyección $f : \mathbb{N} \to X$ se llama *enumeración* de X, pues podemos escribir:

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n), \dots$$

   es decir, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

4. Si $f : X \to Y$ es biyectiva, entonces

$$X \text{ es numerable } \iff Y \text{ es numerable.}$$

Corolario 2.15. *Todo conjunto infinito contiene un conjunto infinito numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto infinito. Por el Teorema 2.13, existe $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva. Entonces, $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ es biyectiva, por lo que $f(\mathbb{N}) \subset X$ es infinito numerable. □

Teorema 2.16. *Sea $X \subset \mathbb{N}$. Entonces, X es numerable.*
(Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es numerable).

Demostración. Si X es finito, entonces es numerable por definición y no hay nada que hacer.

Supongamos que X es infinito y probemos que existe una enumeración de X, es decir, que lo podemos escribir como $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Lo hacemos de forma inductiva:

1. Como $X \subset \mathbb{N}$ y $X \neq \emptyset$, por el PBO, X tiene un elemento mínimo que lo llamamos x_1.

2. Supongamos que ya definimos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Sea $A_n = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Como X es infinito, $A_n \neq \emptyset$. Por el PBO, A_n tiene un elemento mínimo x_{n+1}.

Notemos que el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ así construido es infinito.

Afirmamos que $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. En efecto, por definición de cada x_n, tenemos $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset X$. Si existiese $x \in X \setminus \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, significaría que $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $x \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el Corolario 2.12, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ sería finito, lo que es una contradicción. □

Corolario 2.17. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces:*

1. *Si Y es numerable y f es inyectiva $\implies$ X es numerable.*

2. *Si X es numerable y f es sobreyectiva $\implies$ Y es numerable.*

Demostración. Notemos que el caso finito está cubierto por el Corolario 2.11, por lo basta suponer que Y y X son infinitos para *1.* y *2.*, respectivamente.

1. Sea $g : \mathbb{N} \to Y$ biyectiva, la cual existe pues Y es infinito numerable. Además, $f : X \to f(X)$ es biyectiva.

   Por el Teorema 2.16, conjunto $A = g^{-1}(f(X)) \subset \mathbb{N}$ es un conjunto numerable. Además, la función $f^{-1} \circ g : A \to X$ es biyectiva y, por lo tanto, X es numerable.

2. Idéntica a la demostración del punto 2 del Corolario 2.11.

□

Corolario 2.18. *Sea X numerable y sea $Y \subset X$. Entonces, Y es numerable.*
(Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable).

Demostración. Basta considerar la función inclusión $i : Y \to X$, $i(x) = x$ (la cual es trivialmente inyectiva) y utilizar el Corolario 2.17. □

2.4.1 Algunos conjuntos numerables

A continuación presentamos algunos ejemplos de conjuntos infinito numerables.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

   Por el Corolario 2.17, basta construir una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, definamos
   $$f(1, n) := 2n - 1 \quad \text{y} \quad f(m+1, n) := 2^m(2n-1).$$

   Nota: Aquí, 2^n se define inductivamente por:
   $$2^1 := 2 \quad \text{y} \quad 2^{n+1} = 2^n \cdot 2, n \in \mathbb{N}.$$

   Ejercicio: Use inducción para probar que $2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

   Verifiquemos que f es inyectiva.

   • Si $f(1, n) = f(1, p)$, entonces $2n - 1 = 2p - 1$. Ya vimos que la aplicación $n \mapsto 2n - 1$ es biyectiva. En particular, $n = p$.

   • Si $f(m+1, n) = f(p+1, q)$, entonces $2^m(2n-1) = 2^p(2q-1)$. Supongamos que $m \neq p$. Sin pérdida de generalidad: $m > p$. Entonces, $m = p + r$, para algún $r \in \mathbb{N}$. Así,
   $$\begin{aligned} 2^m(2n-1) = 2^p(2q-1) \quad &\iff \quad 2^p 2^r(2n-1) = 2^p(2q-1) \\ &\iff \quad 2^r(2n-1) = (2q-1), \end{aligned}$$

   lo que es una contradicción pues $2^r(2n-1)$ es par y $2q-1$ es impar. Luego, $m = p$ y, en consecuencia, $n = q$.

   Notar que en la última equivalencia hemos usado que la aplicación $n \mapsto 2^p n$ es biyectiva para todo $p \in \mathbb{N}$ (¡Probarlo!)

2. Si X e Y son numerables, entonces $X \times Y$ es numerable.

   Sean $f : \mathbb{N} \to X$ y $g : \mathbb{N} \to Y$ biyectivas. Definamos $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$ por $\varphi(m, n) := (f(m), g(n))$. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, basta mostrar que φ es sobreyectiva.

   Ejercicio: Demostrar que φ es biyectiva.

3. En general, si $\{X_i\}_{i=1}^n$ son numerables, entonces $X_1 \times \cdots \times X_n$ es numerable.

   Ejercicio: Demostrarlo. Puede ser útil mostrar primero que $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (n veces) es numerable.

4. Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son numerables, entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es numerable.

   (“La unión numerable de conjuntos numerables es numerable”)

   En efecto, consideremos $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X$ dada por $\varphi(m,n) := f_n(m)$, donde $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ es una biyección, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Mostremos que φ es sobreyectiva. Sea $x \in X$. Por definición de X, $x \in X_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$. Como $f_{n_0} : \mathbb{N} \to X_{n_0}$ es biyectiva, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x = f_{n_0}(m_0)$. Es claro que $x = \varphi(m_0, n_0)$.

5. El conjunto de los número enteros $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ es numerable.

   Basta considerar la biyección:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar}, \\ -\frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \end{array}$$

6. El conjunto de los número racionales $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \ / \ m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ es numerable.

   Como $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ son numerables (¿por qué $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ es numerable?), consideramos la función

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{Q} \\ (m,n) & \mapsto & f(m,n) = \dfrac{m}{n}. \end{array}$$

   Es fácil verificar que f es sobreyectiva.

2.4.2 Un conjunto no numerable.

Mostremos que el conjunto de las funciones de los números naturales a valores en $\{0,1\}$, denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\}) = \big\{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \text{ función}\big\}$, es no numerable.

Comencemos notando que cualquier $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ se puede escribir como $f = (f(1), f(2), f(3), \ldots)$.

Supongamos (por contradicción) que $\mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ es numerable. Esto quiere decir que existe una enumeración de $\mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ y podemos listar todos sus elementos como:

$$\begin{array}{c} f_1 = (f_1(1), f_1(2), f_1(3), f_1(4), \ldots) \\ f_2 = (f_2(1), f_2(2), f_2(3), f_2(4), \ldots) \\ f_3 = (f_3(1), f_3(2), f_3(3), f_3(4), \ldots) \\ f_4 = (f_4(1), f_4(2), f_4(3), f_4(4), \ldots) \\ \vdots \\ f_n = (f_n(1), f_n(2), f_n(3), \ldots, f_n(n), \ldots) \\ \vdots \end{array}$$

La idea ahora es construir $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ que no esté en esta lista, lo que sería una contradicción. Sea $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ dada por

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{si } f_n(n) = 1, \\ 1, & \text{si } f_n(n) = 0. \end{cases}$$

En particular, tenemos que $f(n) \neq f_n(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f \neq f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (f no está en la lista).

Observación. La construcción anterior se conoce como método de diagonalización o argumento de la diagonal de Cantor.

2.5 Ejercicios

Ejercicio 2.1. El propósito de esta pregunta es demostrar la propiedad conmutativa de $\mathbb{N}$, es decir,

$$\forall m,n \in \mathbb{N}, m+n = n+m.$$

Para ello, demuestre, usando el Principio de Inducción, que:

(a) $\forall m \in \mathbb{N}, 1 + m = s(m)$.

Obs: Note que por definición, se tiene $m + 1 = s(m)$, pero como no se tiene conmutatividad para la adición aún, no se sabe si $1 + m = s(m)$

(b) $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + s(n) = s(m) + n$.

Finalmente, demuestre la conmutatividad para la adición.

Ejercicio 2.2. Pruebe la propiedad conmutativa para el producto:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \cdot n = n \cdot m.$$

Hint: Inspírese en la pregunta anterior.

Ejercicio 2.3. Demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \cdot a > b$.

Ejercicio 2.4. Pruebe usando inducción que:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.

Proponga una fórmula para $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ y demuéstrela por inducción.

Ejercicio 2.5. Sea $X \subset \mathbb{N}$ no vacío con la propiedad: $m, n \in X \iff m, m + n \in X$. Demuestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = \{n \cdot k / n \in \mathbb{N}\}$, es decir, X es el conjunto de los múltiplos de k.

Hint 1: Puede usar el siguiente resultado: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, entonces n es múltiplo de m o existen $q, r \in \mathbb{N}$ tales que $n = q \cdot m + r$, con $r < m$.

Hint 2: Pruebe el **Hint 1**.

Ejercicio 2.6. Decimos que $p \in \mathbb{N}$ es *primo* si $p \neq 1$ y si no se puede escribir como $p = m \cdot n$ con $m < p$ y $n < p$. Demuestre el **Teorema Fundamental de la Aritmética**: Todo Número Natural se escribe, de modo único, como producto de factores primos.

Hint: Aplique el Segundo Principio de Inducción a un conjunto $X \subset \mathbb{N}$ apropiado.

Ejercicio 2.7. El objetivo de esta pregunta es demostrar que si X es un conjunto finito y $f : X \to X$ una función, entonces:

$$f \text{ es inyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva.}$$

Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Demuestre el resultado para el caso particular $X = I_n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sea $\varphi : I_n \to X$ biyectiva, para algún $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $g : I_n \to I_n$ dada por $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es inyectiva (resp. sobreyectiva) si y solo si f es inyectiva (resp. sobreyectiva).

(c) Utilice las partes (a) y (b) para concluir el resultado.

Ejercicio 2.8. En clases se probó que todo subconjunto Y de un conjunto X finito, es finito. Demuestre que en este caso también se tiene que $|Y| \leq |X|$. Además, pruebe que $|Y| = |X|$ si y sólo si $Y = X$.

Hint: Proceda por inducción en $n = |X|$.

Ejercicio 2.9. Sean X y Y conjuntos finitos. Demuestre que: $|X| = |Y| \iff \exists f : X \to Y$ biyectiva.

Ejercicio 2.10. Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Demuestre que: X es finito $\iff$ Y es finito.

Ejercicio 2.11. Sea $f : X \to Y$ función. Demuestre que:

(a) Y finito y f inyectiva $\implies$ X finito y $|X| \leq |Y|$.

(b) X finito y f sobreyectiva $\implies$ Y finito y $|Y| \leq |X|$.

Hint: Le puede ser útil demostrar primero el siguiente resultado: Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $f : I_m \to I_n$ una función. Demuestre que si f es inyectiva, entonces $m \leq n$.

Ejercicio 2.12. Demuestre los siguientes hechos:

(a) Todo conjunto infinito contiene un conjunto infinito numerable, esto es, dado X un conjunto infinito, existe $Y \subset X$ tal que Y es infinito numerable.

(b) Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable, esto es, dado X numerable e $Y \subset X$, entonces Y es numerable.

Ejercicio 2.13. Sea X un conjunto finito (no vacío) y sea Y un conjunto infinito. Demuestre que:

(a) existe $f : X \to Y$ inyectiva.

(b) existe $g : Y \to X$ sobreyectiva.

Hint: Escriba f (resp. g) como una composición de funciones inyectivas (resp. sobreyectivas). Puede serle útil la pregunta anterior.

Ejercicio 2.14. Sea Y un conjunto numerable y $f : X \to Y$ una función tal que para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es numerable. Demuestre que X es numerable.

Obs: Para $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ denota el conjunto preimagen de $\{y\}$ por f, esto es, $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$.

Ejercicio 2.15. Sean $X, Y \subset \mathbb{N}$. Una función $f : X \to Y$ se dice *creciente* si

$$\forall m, n \in X, m < n \implies f(m) < f(n).$$

Dado $X \subset \mathbb{N}$ infinito, demuestre que existe una biyección creciente $f : \mathbb{N} \to X$.

Hint: Construya f inductivamente utilizando el Principio de Buen Ordenamiento.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS REALES

Algunas consideraciones:

- Denotaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.
- Es posible hacer una construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, pero nos concentraremos en las propiedades (axiomas) que hacen de $\mathbb{R}$ un *cuerpo ordenado completo*.

3.1 $\mathbb{R}$ es un cuerpo

Supongamos que hay dos operaciones definidas sobre $\mathbb{R}$:

1. Adición: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y \in \mathbb{R})$.
2. Multiplicación: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y \in \mathbb{R})$

Además, asumamos que $+$ y $\cdot$ satisfacen los siguientes *axiomas de cuerpo*:

1. Asociatividad.
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$
2. Conmutatividad.
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x + y = y + x.$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \cdot y = y \cdot x.$$
3. Elementos neutros.
$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad x + 0 = x.$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 1 = x.$$
4. Elementos inversos.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R},\ x + (-x) = 0,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R},\ x \cdot x^{-1} = 1.$$
5. Distributividad.
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Definición 3.1 (Cuerpo)**.** Un conjunto K con dos operaciones tales que satisfacen los 5 axiomas anteriores se dice un **cuerpo**. Se suele anotar como $(K, +, \cdot)$.

Observación. Por la definición anterior, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Notación: $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

- $x + (-y)$ se denota $x - y$ (diferencia).
- Si $y \neq 0$, $x \cdot y^{-1}$ se denota $\dfrac{x}{y}$ o x/y (cuociente).

Observación. De la conmutatividad de la adición y de la multiplcación se obtiene, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

- $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$. (“inversos por la izquierda”)
- $(-x) + x = 0$, $x^{-1} \cdot x = 1$ (si $x \neq 0$). (“neutros por la izquierda”)
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. (“distributividad por la derecha”)

Proposición 3.1. *Los axiomas de cuerpo para la adición implican las siguientes propiedades, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.*

1. $x + y = x + z \implies y = z$. *(Ley de cancelación o corte)*
2. $x + y = x \implies y = 0$. *(Unicidad del elemento neutro aditivo)*
3. $x + y = 0 \implies y = -x$. *(Unicidad del elemento inverso aditivo)*
4. $-(-x) = x$. *(x es el inverso aditivo de $-x$)*

Demostración. 1. Notemos que:

$$\begin{array}{rcll} y & = & 0 + y & \text{(por axioma 3)} \\ & = & (-x + x) + y & \text{(por axioma 4)} \\ & = & -x + (x + y) & \text{(por axioma 1)} \\ & = & -x + (x + z) & \text{(por hipótesis)} \\ & = & (-x + x) + z & \text{(por axioma 1)} \\ & = & 0 + z & \text{(por axioma 4)} \\ & = & z & \text{(por axioma 3),} \end{array}$$

lo que prueba la propiedad.

2. Basta tomar $z = 0$ en *1*.
3. Basta tomar $z = -x$ en *1*.
4. Como $-x + x = 0$, basta tomar $-x$ en lugar de x en *3*.

□

Proposición 3.2. *Los axiomas de cuerpo para la multiplicación implican las siguientes propiedades, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $x \neq 0$, $x \cdot y = x \cdot z \implies y = z$. (Ley de cancelación o corte)*
2. *Si $x \neq 0$, $x \cdot y = x \implies y = 1$. (Unicidad del elemento neutro multiplicativo)*
3. *Si $x \neq 0$, $x \cdot y = 1 \implies y = x^{-1}$. (Unicidad del elemento inverso multiplicativo)*
4. *Si $x \neq 0$, $(x^{-1})^{-1} = x$. (x es el inverso multiplicativo de x^{-1})*

Demostración. La demostración es muy parecida a la Proposición 3.1.

1. Notemos que:

$$\begin{array}{rcll} y & = & 1 \cdot y & \text{(por axioma 3)} \\ & = & (x^{-1} \cdot x) \cdot y & \text{(por axioma 4)} \\ & = & x^{-1} \cdot (x \cdot y) & \text{(por axioma 1)} \\ & = & x^{-1} \cdot (x \cdot z) & \text{(por hipótesis)} \\ & = & (x^{-1} \cdot x) \cdot z & \text{(por axioma 1)} \\ & = & 1 \cdot z & \text{(por axioma 4)} \\ & = & z & \text{(por axioma 3),} \end{array}$$

lo que prueba la propiedad.

2. Basta tomar $z = 1$ en *1*.
3. Basta tomar $z = x^{-1}$ en *1*.
4. Como $x^{-1} \cdot x = 1$, basta tomar x^{-1} en lugar de x en *3*.

$\square$

Proposición 3.3. *Los axiomas de cuerpo implican las siguientes propiedades, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

1. $x \cdot 0 = 0$.

2. $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$.

3. $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.

4. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Demostración. 1. Por el axioma 5 (distributividad), tenemos

$$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0.$$

Por la Proposición 3.1, parte *2*, obtenemos $x \cdot 0 = 0$.

2. Supongamos $x \neq 0$. Por hipótesis y la parte *1* tenemos

$$x \cdot y = 0 = x \cdot 0.$$

La Proposición 3.2, parte *1* con $z = 0$, implica que $y = 0$.

3. Probemos solamente que $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$, pues $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$ es análoga.

Por la Proposición 3.1, parte *3*, basta mostrar que $(x \cdot y) + x \cdot (-y) = 0$. En efecto, por la distributividad (axioma 5) y la parte 1 tenemos

$$(x \cdot y) + x \cdot (-y) = x \cdot (y - y) = x \cdot 0 = 0.$$

4. Por la parte 3 tenemos

$$(-x) \cdot (-y) = -\big(x \cdot (-y)\big) = -\big(- (x \cdot y)\big) = x \cdot y,$$

donde la última igualdad se debe a la Proposición 3.1, parte *4*.

$\square$

Observación. La parte 2 de la Proposición 3.3 es equivalente a

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \implies x \cdot y \neq 0.$$

3.2 $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado

Supongamos que existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ tal que satisface los siguientes *axiomas de orden*:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x + y \in \mathbb{R}^+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, solo ocurre una de las siguientes alternativas:

$$x = 0 \vee x \in \mathbb{R}^+ \vee -x \in \mathbb{R}^+.$$

Observación.

- $\mathbb{R}^+$ es llamado el conjunto de los *reales positivos*.
- A partir de $\mathbb{R}^+$, se define $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} / -x \in \mathbb{R}^+\}$ (*reales negativos*).
- $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, con $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ y $\{0\}$ disjuntos entre sí.

Definición 3.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Decimos que x es menor que y si $y - x \in \mathbb{R}^+$. Se denota como $x < y$.
2. Decimos que x es mayor que y si $x - y \in \mathbb{R}^+$. Se denota como $x > y$

Observación.

- $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$, $x > y \iff x - y \in \mathbb{R}^+$.
- $y > x \iff x < y$.
- **Notación:** $x \leq y \iff x < y \vee x = y$ ("x es menor o igual que y")
  $x \geq y \iff x > y \vee x = y$ ("x es mayor o igual que y")
- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$. En efecto, por definición:

$$x > 0 \iff x - 0 \in \mathbb{R}^+ \iff x \in \mathbb{R}^+.$$

- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$. En efecto,

$$x < 0 \iff 0 - x \in \mathbb{R}^+ \iff -x \in \mathbb{R}^+.$$

Proposición 3.4. *Los axiomas de orden implican las siguientes propiedades.*

1. *Transitividad.*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x < y \wedge y < z \implies x < z.$$

2. *Tricotomía.* $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *solo ocurre una de las siguientes alternativas:*

$$x = y \vee x < y \vee x > y.$$

3. *Monotonía adición.*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x < y \implies x + z < y + z.$$

4. *Monotonía multiplicación.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \forall z > 0, x \cdot z < y \cdot z.$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \forall z < 0, x \cdot z > y \cdot z.$$

Demostración.

1. Veamos que $z - x \in \mathbb{R}^+$. Notemos que

$$z - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - x).$$

Como $z - y, y - x \in \mathbb{R}^+$, se concluye por el primer axioma de orden.

2. Directo del segundo axioma de orden.
3. Basta notar que

$$(y + z) - (x + z) = y + (z - z) - x = y - x \in \mathbb{R}^+.$$

4. Sea $z > 0$, es decir, $z \in \mathbb{R}^+$. Como $y - x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que

$$y \cdot z - x \cdot z = (y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+.$$

Sea $z < 0$, es decir, $-z \in \mathbb{R}^+$. Como $y - x \in \mathbb{R}^+$, tenemos que

$$x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z = (y - x) \cdot (-z) \in \mathbb{R}^+.$$

□

Proposición 3.5. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

1. $x \neq 0 \implies x^2 > 0$. *En particular,* $1 > 0$.

2. $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Demostración. 1. Si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$, por el primer axioma de orden.

Si $-x \in \mathbb{R}^+$, por la Proposición 3.3, tenemos $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+$.

Como $1 = 1 \cdot 1$, se tiene que $1 > 0$.

2. Primero notemos que si $y^{-1} < 0$, entonces como $y > 0$, la monotonía de la multiplicación implicaría que $1 = y \cdot y^{-1} < 0 \cdot y^{-1} = 0$, lo que es una contradicción.

   Mostremos ahora que $x^{-1} - y^{-1} \in \mathbb{R}^+$. En efecto, notemos que

$$x^{-1} - y^{-1} = x^{-1} \cdot (1 - x \cdot y^{-1}) = x^{-1} \cdot (y - x) \cdot y^{-1}.$$

   Como $y > x$ y ya probamos que $x^{-1}, y^{-1} \in \mathbb{R}^+$, se concluye.

□

3.3 ¿Qué relación hay entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$?

Notemos que como $1 > 0$, tenemos que

$$1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \cdots . \tag{3.1}$$

Pregunta: ¿Este $1 \in \mathbb{R}$ (dado por los axiomas de cuerpo) es el mismo que el $1 \in \mathbb{N}$ dado por lo axiomas de Peano?

La respuesta es que no necesariamente. Sin embargo, la adición y multiplicación en $\mathbb{R}$ son "compatibles" con aquellas definidas para $\mathbb{N}$ en el sentido de que estas últimas satisfacen la asociatividad, conmutatividad y distributividad de los axiomas de cuerpo (ver Sección 2.1.1). Así, al menos podemos identificar $1 \in \mathbb{R}$ y $1 \in \mathbb{N}$. Entonces, gracias a (3.1) podemos identificar a $\mathbb{N}$ con un subconjunto de $\mathbb{R}$. En términos prácticos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $-n \in \mathbb{R}$ ($-n$ es el inverso aditivo de n como elemento de $\mathbb{R}$). Si definimos

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

llamado el conjunto de los números enteros, tenemos que

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

De forma similar, para $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1} \in \mathbb{R}$ (n^{-1} es el inverso multiplicativo de n como elemento de $\mathbb{R}$). Sea

$$\mathbb{Q} := \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

llamado el conjuntos de los número racionales. Claramente,

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Tenemos entonces que

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Se puede verificar sin mucha dificultad que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ (con la adición y multiplicación usual para números racionales) satisface los axiomas de cuerpo y orden, por lo que también es un cuerpo ordenado.

En lo que sigue, trataremos de responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. ¿Hay alguna diferencia fundamental entre los cuerpos ordenados $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

3.4 $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo

Recordemos que $\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Además, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son ambos cuerpos ordenados. ¿Qué los diferencia?

Para responder a esta pregunta, necesitamos introducir el concepto de supremo de un conjunto.

3.4.1 Preliminares

Definición 3.3. $A \subset \mathbb{R}$ se dice *acotado superiormente* si $\exists b \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $x \leq b$.
Un tal $b \in \mathbb{R}$ se dice *cota superior* de A.

Definición 3.4. $A \subset \mathbb{R}$ se dice *acotado inferiormente* si $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $x \geq a$.
Un tal $a \in \mathbb{R}$ se dice *cota inferior* de A.

Definición 3.5. $A \subset \mathbb{R}$ se dice *acotado* si es acotado superior e inferiormente.

Ejemplo. $\mathbb{N}$ es acotado inferiormente, pero no es acotado superiormente.

Observación. $A \subset \mathbb{R}$ acotado $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leq c$, donde $|x|$ denota el **valor absoluto** de x dado por:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Definición 3.6. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Se dice que $b \in \mathbb{R}$ es *supremo* de A (denotado $b = \sup A$) si

1. $\forall x \in A, x \leq b$. ($b$ es *cota superior* de A)

2. Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in A, x \leq c$, entonces $b \leq c$. (b es la menor de las cotas superiores)

Definición 3.7. Se dice que $b = \sup A$ es *máximo* de A (denotado $b = \max A$) si $b \in A$.

Ejemplo. Sea $A = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \wedge x < 1\}$. Entonces, $b = \sup A = 1$, pero $b \notin A$.
Ejemplo. Sea $B = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0 \wedge x \leq 1\}$. Entonces, $b = \sup B = 1$ y $b \in B$, es decir, $b = \max B = 1$.

Observación. Sea $b = \sup A$. Entonces, son equivalentes:

(a) Propiedad 2. de la definición de supremo.

(b) Si $c < b$, entonces $\exists x \in A, x > c$.

(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > b - \varepsilon$.

En efecto:
- Notemos que (b) es simplemente la contrarecíproca de (a). Entonces: (a) $\iff$ (b).
- Supongamos (b). Sea $\varepsilon > 0$. Basta tomar $c = b - \varepsilon$ en (b) para obtener (c). Entonces (b) $\implies$ (c).
- Supongamos (c). Si $c < b$, basta tomar $\varepsilon = b - c > 0$ en (c) para obtener (b). Entonces (c) $\implies$ (b).

Definición 3.8. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es *ínfimo* de A (denotado $a = \inf A$) si

1. $\forall x \in A, x \geq a$. ($a$ es *cota inferior* de A)

2. Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in A, x \geq c$, entonces $a \geq c$. (a es la mayor de las cotas inferiores)

Definición 3.9. Se dice que $a = \inf A$ es *mínimo* de A (denotado $a = \min A$) si $a \in A$.

Observación. Sea $a = \inf A$. Entonces, son equivalentes:

(a) Propiedad 2. de la definición de ínfimo.

(b) Si $c > a$, entonces $\exists x \in A, x < c$.

(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < a + \varepsilon$.

Ejercicio: Demostrar que (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c).

3.4.2 $\mathbb{Q}$ es "incompleto"

Mostraremos que existen subconjuntos acotados de $\mathbb{Q}$ que no tienen supremo (y/o ínfimo) en $\mathbb{Q}$.

Comencemos mostrando el siguiente resultado que será la base de nuestro argumento.

Proposición 3.6. *No existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existen $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tales que

$$\frac{p^2}{q^2} = 2.$$

Sin pérdida de generalidad, suponemos que

- $p, q > 0$ (al hacer p^2/q^2, el signo de p y q no influye en el análisis).
- p o q es impar (si no es el caso, se divide por 2 cuantas veces sea necesario).

Ahora, tenemos $p^2 = 2q^2$, lo que implica que p^2 es par y, por lo tanto, también lo es p.

Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2n$. Entonces, la igualdad $p^2 = 2q^2$ se escribe como $4n^2 = 2q^2$, es decir, q^2 es par y, en consecuencia, también lo es q. Contradicción con el hecho de que al menos uno entre p y q es impar. □

Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} / x > 0 \wedge x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Mostraremos que es acotado superiormente, pero que no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Comencemos con un resultado que será muy útil.

Lema 3.7. *Sea $B = \{x \in \mathbb{Q} / x > 0 \wedge x^2 > 2\}$. Entonces:*

1. $\forall a \in A, \exists a' \in A, a < a'$.
2. $\forall b \in B, \exists b' \in B, b' < b$.

Demostración. Denotemos $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x > 0\}$. Definamos la función $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ como

$$f(x) = x + \frac{2 - x^2}{x + 2}. \tag{3.2}$$

Un cálculo sencillo, nos muestra que

$$f(x)^2 = 2 + \frac{2(x^2 - 2)}{(x + 2)^2}. \tag{3.3}$$

Si $a \in A$, basta elegir $a' = f(a)$. En efecto, la identidad (3.3) implica que $f(a)^2 < 2$, es decir, $a' \in A$. Además, por (3.2), tenemos $f(a) > a$, es decir, $a' > a$.

Análogamente, si $b \in B$, basta elegir $b' = f(b)$. □

Ahora, probemos el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *El conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} / x > 0 \wedge x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Notemos que 2 es cota superior de A, pues

$$x > 2 \implies x^2 > 4 > 2 \implies x \notin A.$$

En particular, A es acotado superiormente. (De hecho, es acotado, pues $A \subset [0, 2]$).

Supongamos que A tiene supremo en $\mathbb{Q}$, es decir, $c := \sup A \in \mathbb{Q}$. Lo primero que observamos es que $c > 0$, pues $1 \in A$, entonces $c \geq 1$.

Sea $B = \{x \in \mathbb{Q} / x > 0 \wedge x^2 > 2\}$. Por la Proposición 3.6, tenemos que $c \in A$ o $c \in B$, pues $c^2 \neq 2$.

Por la parte 1 del Lema 3.7, ningún elemento de A puede ser cota superior. En particular, $c \notin A$.

Por otro lado, afirmamos que B es el conjunto de las cotas superiores de A. En efecto, sea $b \in B$ y supongamos que no es cota superior de A, es decir, que existe $x \in A$ tal que $x > b$. Entonces,

$$2 < b^2 < x^2 < 2,$$

lo que es una contradicción. Además, la parte 1 del Lema 3.7 y la Proposición 3.6 dicen que el conjunto de las cotas superiores de A está contenido en B.

Por la parte 2 del Lema 3.7 no puede haber una cota superior mínima. En particular, $c \notin B$.

Concluimos que $c = \sup A$ no puede ser un número racional. □

3.4.3 Axioma del supremo

Asumiremos que $\mathbb{R}$ satisface el siguiente axioma, llamado *axioma del supremo*:

Todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Definición 3.10. Un cuerpo ordenado $(K, +, \cdot)$ se dice *completo* si satisface el axioma del supremo.

Observación.

- En el sentido de la Definición 3.10, $\mathbb{Q}$ no es completo.
- En el sentido de la Definición 3.10, $\mathbb{R}$ es completo.
- Todo $A \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{R}$ (esto es una consecuencia del axioma del supremo, no un nuevo axioma).
- $A = \{x \in \mathbb{Q} / x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ tiene supremo en $\mathbb{R}$, $c = \sup A$, que es tal que $c^2 = 2$. Llamamos $c := \sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, donde llamamos $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ el conjunto de los números irracionales.

3.5 Sobre la existencia de $\mathbb{R}$

Establecimos la existencia de $\mathbb{R}$ desde un punto de vista axiomático, es decir, hicimos una lista de propiedades que este conjunto debe satisfacer. Sin embargo, es posible construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ (el cual se construye a partir de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$).

Algunas formas o métodos de construcción de los reales a partir de los racionales son:

1. Método de cortes de Dedekind.
2. Método de las sucesiones de Cauchy (Cantor).

No veremos esta construcción en este curso. Sin embargo, la persona interesada puede consultar los textos “Principles of Mathematical Analysis” de Walter Rudin y “Analysis I” de Terence Tao, donde se presentan estos métodos.

Entonces, se puede probar que existe un cuerpo ordenado completo, que es **único salvo isomorfismos**. Siendo más precisos, si K y L son dos cuerpos ordenados completos, se puede probar que $\exists! f : K \to L$ biyectiva tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ (preserva la adición)}$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y). \text{ (preserva el producto)}$$

Además, satisface $x < y \iff f(x) < f(y)$ (preserva el orden).

Una tal función se dice *isomorfismo* y, en este caso, se dice que K y L son *isomorfos*.

3.6 Consecuencias del Axioma del Supremo

Veremos dos consecuencias del Axioma del Supremo:

1. $\mathbb{R}$ es arquimediano.
2. $\mathbb{R}$ no es numerable.

3.6.1 $\mathbb{R}$ es arquimediano

Teorema 3.9. *El conjunto de los números reales satisface las siguientes propiedades.*

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *no es acotado superiormente.*
2. $\inf \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$
3. $\forall a, b, \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}, na > b.$

Demostración. 1. Supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Por el axioma del supremo (pues $\mathbb{N} \neq \emptyset$), existe $c = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Ahora, notemos que $c - 1$ no puede ser cota superior de $\mathbb{N}$, pues $c - 1 < c$. Entonces,

$$\exists n \in \mathbb{N}, c - 1 < n \iff \exists n \in \mathbb{N}, c < n + 1.$$

Como $n + 1 \in \mathbb{N}$, esto significa que c no puede ser cota superior, lo que contradice que $c = \sup \mathbb{N}$.

2. Llamemos $A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$. Notemos que $0 \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, pues $\frac{1}{n} > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos que es la mayor.

Sea $c > 0$ arbitrario. Como ya probamos que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente, entonces

$$\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{c} < n \iff \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < c,$$

es decir, c no es cota inferior. Concluimos que $0 = \inf A$.

3. Sean $a, b > 0$. Como $0 = \inf A$ y $\frac{a}{b} > 0$, entonces

$$\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < \frac{a}{b} \iff \exists n \in \mathbb{N}, b < na.$$

□

Observación. Las propiedades 1., 2. y 3. son equivalentes. En efecto, probamos que

$$1. \implies 2. \implies 3.$$

Solo falta probar 3. $\implies$ 1.. Para esto, sea $c \in \mathbb{R}$. Como $n > 0$ para todo $n \in \mathbb{R}$, basta tomar el caso $c > 0$. Tomando $a = 1$ y $b = c$ en 3., obtenemos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > c$, es decir, $\mathbb{N}$ no es acotado.

Definición 3.11 (Cuerpo arquimediano)**.** Un cuerpo ordenado $(K, +, \cdot)$ que satisface 1., 2. y 3. se dice *arquimediano.*

Observación.

- Por el Teorema 3.9, $\mathbb{R}$ es arquimediano.
- $(K, +, \cdot)$ completo $\implies$ $(K, +, \cdot)$ arquimediano, pero $(K, +, \cdot)$ arquimediano **no implica** $(K, +, \cdot)$ completo.
- **Ejemplo:** $\mathbb{Q}$ es arquimediano, pero no es completo.

3.6.2 $\mathbb{R}$ no es numerable

En esta parte probaremos que $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable. Existe una prueba de este hecho usando el argumento de la diagonal de Cantor, donde se ocupa la representación decimal de los números reales. Sin embargo, aquí haremos una demostración axiomática.

La demostración consiste en mostrar que no puede existir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobreyectiva. Para esto, nos será útil el siguiente resultado.

Teorema 3.10 (de los intervalos encajados)**.** *Sea $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ una secuencia de intervalos cerrados y acotados: $I_n := [a_n, b_n]$, con $a_n \leq b_n$. Entonces, $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c \in I_n$, es decir, $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.*

Demostración. Como los intervalos I_n están encajonados, tenemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Notemos que $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, A es acotado superiormente. Como $A \neq \emptyset$, por el axioma del supremo, existe $c = \sup A$.

Por un lado, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (c es cota superior de A). Por otro lado, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, b_n es cota superior de A (¿Por qué?), entonces $c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (c es la menor de las cotas superiores de A).

Así, hemos probado que $a_n \leq c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $c \in [a_n, b_n] = I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ejercicio. Mostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b]$, donde $a = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$, $b = \inf\{b_1, b_2, \ldots\}$.

Teorema 3.11. *$\mathbb{R}$ no es numerable.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera y vemos que no puede ser sobreyectiva.

Para esto, basta mostrar que existe una secuencia $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos cerrados y acotados tales que $f(n) \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, por el Teorema de los intervalos encajonados, existe $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $f(n) \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, f no es sobreyectiva.

Construyamos inductivamente la secuencia de intervalos I_n.

• Sean $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tales que $f(1) < a_1 < b_1$. En particular, $f(1) \notin I_1$, donde $I_1 := [a_1, b_1]$.

• Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que ya definimos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ tales que

$$f(i) \notin I_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

donde $I_i = [a_i, b_i]$ con $a_i < b_i$.

Definimos I_{n+1} de la siguiente manera:

1. Si $f(n+1) \notin I_n$, entonces $I_{n+1} := I_n$.

2. Si $f(n+1) \in I_n$, entonces $f(n+1) > a_n$ o $f(n+1) < b_n$, pues $a_n < b_n$.

   Si $f(n+1) > a_n$, definimos $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$, donde

   $$a_{n+1} := a_n \quad \text{y} \quad b_{n+1} := \frac{a_n + f(n+1)}{2},$$

   de modo que $a_{n+1} < b_{n+1} < f(n+1)$. En particular, $f(n+1) \notin I_{n+1}$.

   Si $f(n+1) < b_n$, definimos $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$, donde

   $$a_{n+1} := \frac{f(n+1) + b_n}{2} \quad \text{y} \quad b_{n+1} := b_n,$$

   de modo que $f(n+1) < a_{n+1} < b_{n+1}$. En particular, $f(n+1) \notin I_{n+1}$.

□

Corolario 3.12. *El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es no numerable.*

Demostración. Notemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$ es numerable. Si $\mathbb{I}$ fuera numerable, $\mathbb{R}$ también lo sería (unión de dos conjuntos nomerables). Esto contradice el Teorema 3.11. □

Corolario 3.13. *Todo intervalo no degenerado es no numerable.*
(Un intervalo se dice degenerado *si sus extremos son iguales)*

Demostración. Sea I un intervalo no degenerado. Entonces, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $(a, b) \subset I$. Probemos que (a, b) es no numerable, lo que implica que I no puede ser numerable.

Sea $g : (0, 1) \to (a, b)$ dada por $g(x) = a + (b - a)x$. Como g es biyectiva (probarlo), basta probar que $(0, 1)$ es no numerable.

Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x(1 - x)}$.

Ejercicio: Probar que f es biyectiva (sin usar gráficos ni propiedades de crecimiento).

Como $\mathbb{R}$ no es numerable, tampoco lo es $(0, 1)$, lo que termina la demostración. □

Teorema 3.14. *Sea I un intervalo no degenerado. Entonces:*

1. *Existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x \in I$.*
2. *Existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in I$.*

Demostración. 1. Si para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se tiene que $x \notin I$, entonces $I \subset \mathbb{Q}$, lo que implica que I es numerable, contradiciendo el Corolario 3.13.

2. Como I es no degenerado, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $[a, b] \subset I$, con $a < b$.

   Si $a \in \mathbb{Q}$ o $b \in \mathbb{Q}$, entonces basta tomar $x = a$ o $x = b$, según sea el caso.

   Supongamos que $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Usando que $\mathbb{R}$ es arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < b - a$.

   Para cada $m \in \mathbb{Z}$, definimos $I_m = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$. Entonces, $\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m$, lo que dice que existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_p$.

   Como $a \notin \mathbb{Q}$, entonces
   $$\frac{p}{n} < a < \frac{p+1}{n}.$$
   Además,
   $$\frac{p+1}{n} = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$
   es decir, $\dfrac{p+1}{n} \in (a, b) \subset I$.

$\square$

Definición 3.12 (Conjuntos densos)**.** $A \subset \mathbb{R}$ se dice *denso* en $\mathbb{R}$ si para todo intervalo $(a, b), \exists x \in A, x \in (a, b)$.

Como consecuencia directa del Teorema 3.14 tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 3.15. $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{I}$ *son densos en* $\mathbb{R}$*.*

3.7 Un poco de cardinales

En la Sección 2.2, definimos el **cardinal** de un conjunto finito. Por otro lado, vimos que $\mathbb{R}$ no es numerable. En particular, demostramos que no puede existir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobreyectiva. Esto nos da la idea de que $\mathbb{R}$ tiene más elementos que $\mathbb{N}$, o que el "card($\mathbb{R}$)" es mayor que el "card($\mathbb{N}$)".

En general, si A es un conjunto cualquiera, card(A) no tiene sentido por sí solo, sino que se definen **relaciones entre cardinales**.

Sean A y B conjuntos, se definen las siguientes relaciones:

- $\text{card}(A) = \text{card}(B) \iff \exists f : A \to B$ biyectiva.
- $\text{card}(A) \leq \text{card}(B) \iff \exists f : A \to B$ inyectiva.
- $\text{card}(A) < \text{card}(B) \iff \exists f : A \to B$ inyectiva, pero no sobreyectiva.

También se define:

- $\text{card}(A) \geq \text{card}(B) \iff \exists f : A \to B$ sobreyectiva.
- $\text{card}(A) > \text{card}(B) \iff \exists f : A \to B$ sobreyectiva, pero no inyectiva.

En este sentido, $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ significa que A tiene menos elementos que B. Notemos que esto es consistente con la definición de card(A) cuando A es finito (usando la notación $\text{card}(I_n) = n$, donde $I_n = \{1, \ldots, n\}$).

Con esta nueva notación, probamos que
$$\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(\mathbb{R}).$$

Es más, se puede probar que para todo conjunto A existe un conjunto cuyo cardinal es mayor:

$$\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(A)).$$

Por otro lado, si consideramos el conjunto $\mathcal{F}(A;\{0,1\}) = \{f \ / \ f : A \to \{0,1\} \text{ función}\}$ (el conjunto de todas las funciones de A a valores en $\{0,1\}$), podemos probar que

$$\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = \operatorname{card}(\mathcal{F}(A;\{0,1\})).$$

Ejercicio: Probar que la función

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{F}(A;\{0,1\}) \\ X & \mapsto & \mathbb{1}_X \end{array}$$

es una biyección, donde $\mathbb{1}_X$ es la **función característica de** X, dada por

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X, \\ 0, & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

Entonces,

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) < \operatorname{card}(\mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})),$$

que, de hecho, ya lo habíamos probado (Sección 2.4.2).

Observemos ahora que si A es finito, entonces $\operatorname{card}(\mathcal{F}(A;\{0,1\})) = 2^{\operatorname{card}(A)}$ (¿Por qué?). En general, la **potencia de cardinales** se define como

$$\operatorname{card}(X)^{\operatorname{card}(Y)} = \operatorname{card}(Z),$$

donde $Z = \{f : Y \to X \text{ función}\}$ (también se anota $Z = \mathcal{F}(Y;X)$ o $Z = X^Y$).

Además, se puede probar que

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})).$$

Usando las notaciones usuales $\aleph_0 = \operatorname{card}(\mathbb{N})$ (Álef cero) y $c = \operatorname{card}(\mathbb{R})$, obtenemos

$$c = 2^{\aleph_0}.$$

Surge una pregunta de forma natural: ¿Existe un conjunto A tal que $\aleph_0 < \operatorname{card}(A) < c$? La respuesta es que, bajo los axiomas usuales, no se puede dar una respuesta positiva o negativa. La **Hipótesis del Continuo** dice que no existe tal conjunto. Al cardinal de $\mathbb{R}$ se le suele llamar la **cardinalidad del continuo**.

3.8 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Considere el conjunto de dos elementos $K = \{\alpha, \beta\}$. Se definen dos operaciones sobre K, $\circ$ y $\star$, mediante

$$\begin{array}{c|cc} \circ & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \star & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta \end{array}.$$

Demuestre que $(K, \circ, \star)$ es un cuerpo. ¿Puede construir un cuerpo $(K, \circ, \star)$ con $K = \{\alpha, \beta, \gamma\}$?

Ejercicio 3.2. Demuestre la desigualdad de Bernoulli:

$$\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Hint: Use inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ y aplique apropiadamente los axiomas y las propiedades de los números reales.

Ejercicio 3.3. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se define $|x| \in \mathbb{R}$, llamado *valor absoluto* o *módulo* de x, como: $|x| = x$ si $x > 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$, y $|0| = 0$. Demuestre las siguientes propiedades:

(a) $|x| = \max\{x, -x\}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ y $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \geq |x| - |y|$.

(e) Sean $a, x \in \mathbb{R}, b \geq 0, |x - a| \leq b \iff a - b \leq x \leq a + b$.

(f) Sean $a, x \in \mathbb{R}, b \geq 0, |x - a| \geq b \iff x \leq a - b \vee x \geq a + b$.

Ejercicio 3.4. Usando exclusivamente los axiomas de los reales, demuestre que:

(a) $\forall x, y, w, z \in \mathbb{R},\ x < y \ \wedge\ w < z \implies x + w < y + z$.

(b) $\forall x, y, w, z \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \ \wedge\ 0 < w < z \implies x \cdot w < y \cdot z$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1}$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot x = 0 \implies x = 0$.

(e) $\forall x, y, w, z \in \mathbb{R}, w \neq 0, z \neq 0,\ (x \cdot w + y \cdot z)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda \cdot w, y = \lambda \cdot z$.

(f) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^3 \cdot y + x \cdot y^3 \leq x^4 + y^4$.

Nota: Cada paso debe ser justificado claramente, mencionando el axioma o propiedad de los reales que está utilizando. Puede usar propiedades que hayan sido demostradas previamente en clases o ayudantía. Si necesita alguna propiedad extra, demuéstrela.

Ejercicio 3.5. (*Parte entera*) Sea $x > 0$ fijo. Denotando $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$, define el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n \leq x\}$.

(a) Demuestre que el conjunto A tiene supremo. Denote $[x] := \sup A$.

(b) Demuestre que existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $[x] - \frac{1}{2} \leq n_0 \leq [x]$.

(c) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$. Demuestre que $n \notin A$ y deduzca que n_0 es cota superior de A.

(d) Concluya que $[x] \in A$ y que, en particular, $[x] \in \mathbb{N}^*$.

Nota: $[x]$ se llama parte entera o cajón inferior de x.

(e) Demuestre que: $\forall x > 0, [x] \leq x < [x] + 1$.

Ejercicio 3.6. Sea $b \in \mathbb{R}$ y considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \forall \varepsilon > 0, x < b + \varepsilon\}$.

(a) Pruebe que A es acotado y que tiene un supremo.

(b) Demuestre que $\sup A = b$.

(c) ¿Tiene A un máximo?

Ejercicio 3.7. Para este problema, puede asumir que, dados $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, está definido $a^x \in \mathbb{R}$ con la propiedad $a^{x+y} = a^x a^y$, y $a^x > 1$ si $x > 0$.
Sean $b > 1$ e $y > 0$ dos números reales fijos. Probaremos que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $b^x = y$. Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, b^n - 1 \geq n(b - 1)$.

(b) Deduzca que $\forall n \in \mathbb{N}, b - 1 \geq n(b^{1/n} - 1)$.

(c) Pruebe que si $t > 1$ y $n > \frac{b-1}{t-1}$, entonces $b^{1/n} < t$.

(d) Sea $w \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $b^w < y$, entonces $b^{w+(1/n)} < y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.
Hint: Use (c) con $t = y \cdot b^{-w}$.

(e) Sea $w \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $b^w > y$, entonces $b^{w-(1/n)} > y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

(f) Sea $A = \{w \in \mathbb{R}/b^w < y\}$. Pruebe que $x = \sup A$ (¿Existe $\sup A$?) es tal que $b^x = y$.

(g) Concluya probando que el x de la parte anterior es único.

Ejercicio 3.8. Sea $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ una secuencia de intervalos cerrados y acotados: $I_n = [a_n, b_n]$. Demuestre que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = [a, b]$, donde $a \leq b$ con $a = \sup\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ y $b = \inf\{b_n/n \in \mathbb{N}\}$. Exhiba un ejemplo donde $a = b$.

Ejercicio 3.9. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ acotados superiormente tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) Pruebe que $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

(b) Muestre mediante un ejemplo que la desigualdad anterior puede ser estricta.

Ejercicio 3.10. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos tales que $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \leq b$.

(a) Pruebe que $\sup A$ y $\inf B$ existen, y que $\sup A \leq \inf B$.

(b) Pruebe que:
$$\sup A = \inf B \iff \forall c > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a < c.$$

CAPÍTULO 4

SUCESIONES

4.1 Definición y ejemplos

Definición 4.1 (Sucesión)**.** Una *sucesión* de números reales es una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notación: Dada una sucesión $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, denotamos $x_n = x(n)$, llamado el n-ésimo término de la sucesión. Usualmente, una sucesión se denota como:

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.
- $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $x = (x_n)$.

Ejemplo: Sea $a \in \mathbb{R}$. La función

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a^n \end{array}$$

es una sucesión. Se denota también como:

- $x_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- (a^n).

Definición 4.2 (Sucesión acotada)**.** Una sucesión (x_n) se dice *acotada superiormente* (resp. *inferiormente*) si $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq c$ (resp. $x_n \geq$ c).

Además, (x_n) se dice *acotada* si es acotada superior e inferiormente.

Observación. (x_n) es acotada $\iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq c$.

Ejemplo: Sea $a > 1$. La sucesión (a^n) es acotada inferiormente, pero no superiormente.

En efecto, como $a > 1$, por la monotonía de la multiplicación, tenemos $a^{n+1} \geq a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, es sencillo mostrar por inducción que $a^n \geq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, (a^n) es acotada inferiormente (por a).

Para mostrar que (a^n) no es acotada superiormente, necesitamos el siguiente resultado, el cual se puede demostrar usando inducción (ver Guía 3, P2):

Desigualdad de Bernoulli: $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Sea $d > 0$ tal que $a = 1 + d$. Entonces, por la Desigualdad de Bernoulli, tenemos

$$a^n \geq 1 + nd, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea $c \in \mathbb{R}$. Mostremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0} > c$. Esto es consecuencia de que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente ($\mathbb{R}$ es arquimediado), pues, como $d > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 d > c - 1$. Así:

$$a^{n_0} \geq 1 + n_0 d > c,$$

por lo tanto, (a^n) no es acotada superiormente. Más aún, para todo $n \geq n_0$:

$$a^n \geq 1 + nd \geq 1 + n_0 d > c.$$

4.2 Límite de sucesiones

Definición 4.3 (Límite)**.** Sea (x_n) sucesión. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es *límite* de (x_n) si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |x_n - L| < \varepsilon.$$

Se denota $L = \lim x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, o $x_n \to L$.

Observación.

- Si $\lim x_n = L$, se dice que (x_n) es *convergente* o que *converge a* L.
- Si (x_n) no es convergente, se dice *divergente*.
- (x_n) converge a $L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
- (x_n) diverge $\iff \forall L \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n > n_0, |x_n - L| \geq \varepsilon$.

Ejemplo: Sea $a \in (0, 1)$. Entonces, $\lim a^n = 0$.
En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{1}{a} > 1$, por el Ejemplo anterior, la sucesión $(\frac{1}{a^n})$ no es acotada superiormente y, además:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon},$$

o equivalentemente:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a^n < \varepsilon.$$

Observación. Siendo precisos con la definición de límite, en el ejemplo anterior, hemos usado que

$$a^n < \varepsilon \iff |a^n - 0| < \varepsilon,$$

pues $a^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.1 (Unicidad del límite)**.** *Sean (x_n) una sucesión y $L, K \in \mathbb{R}$ tales que $L = \lim x_n$ y $K = \lim x_n$. Entonces, $K = L$.*

Demostración. Basta mostrar que $|L - K| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.
Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que

- $L = \lim x_n \implies \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1, |x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- $K = \lim x_n \implies \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2, |x_n - K| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En lo anterior, se tomó $\frac{\varepsilon}{2}$ en lugar de ε en la definición de límite.
Sea $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Entonces, para todo $n > n_0$ tenemos

$$|L - K| = |L - x_n + x_n - K| \leq |L - x_n| + |x_n - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que implica que $L = K$. $\square$

Teorema 4.2. *Sea (x_n) convergente. Entonces, (x_n) es acotada.*

Demostración. Sea $L = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de límite, tenemos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |x_n - L| < 1,$$

o equivalentemente,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, L - 1 < x_n < L + 1.$$

Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, L - 1, L + 1\}$. Como $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito no vacío, es acotado. Por el axioma del supremo, existen $M = \sup A$ y $m = \inf A$ (en realidad son máximo y mínimo) y tenemos que $x_n \in [m, M]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observación.

- (x_n) no acotada $\implies$ (x_n) divergente.
- En general, si (x_n) es acotada no es suficiente para que (x_n) sea convergente.

  Ejemplo: La sucesión $x_n = (-1)^n$ es acotada, pero no tiene límite.

4.3 Sucesiones monótonas

Definición 4.4 (Sucesión monótona)**.** Una sucesión (x_n) se dice *monótona* si:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1} \text{ (\textit{monótona creciente})}$$

o

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1} \text{ (\textit{monótona decreciente})}.$$

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$), (x_n) se dice *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*).

Ejemplo: La sucesión (a^n):

- es creciente si $a > 1$.
- es decreciente si $0 < a < 1$.

Teorema 4.3. *Sea (x_n) monótona acotada. Entonces, x_n es convergente.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que (x_n) es monótona creciente.

Sea $A = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Como (x_n) es acotada, A es un conjunto no vacío y, en particular, acotado superiormente. Entonces, existe $a = \sup A$ (por el axioma del supremo).

Ahora, sea $\varepsilon > 0$. Como $a - \varepsilon$ no puede ser cota superior de A (pues $a - \varepsilon < a$), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$.

Además, como (x_n) es monótona creciente:

$$\forall n > n_0, a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon.$$

De lo anterior, encontramos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

es decir, $a = \lim x_n$ y, por lo tanto, (x_n) es convergente. □

Observación. De la demostración del Teorema 4.3 podemos deducir que:

1. Si (x_n) es monótona creciente y acotada superiormente, entonces (x_n) converge y $\lim x_n = \sup\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (x_n) es monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces (x_n) converge y $\lim x_n = \inf\{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

4.4 Subsucesiones y Teorema de Bolzano-Weierstrass

Definición 4.5 (Subsucesión)**.** Dada una sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una *subsucesión* de (x_n) es una restricción de $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a un subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Notación: El conjunto $\mathbb{N}'$ se escribe como $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ donde $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Si denotamos por $x' = x|_{\mathbb{N}'}$ (la restricción de x al conjunto $\mathbb{N}'$), entonces

$$\begin{array}{rcl} x' : \mathbb{N}' & \to & \mathbb{R} \\ n_k & \mapsto & x_{n_k} \end{array}$$

es una subsucesión de $x = (x_n)$.

Usualmente, una subsucesión de (x_n) se denota como:

- $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
- (x_{n_k}).
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.
- $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$

Ejemplo: Sea (x_n) una sucesión y $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los subíndices impares: $\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, es decir, $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots)$$

es una subsucesión de (x_n) llamada la **subsucesión de los subíndices impares**.

De la misma forma, la **subsucesión de los subíndices pares** está dada por

$$(x_{n_k}) = (x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots),$$

donde $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$).

Observación. Como $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ es infinito, es no acotado. En particular, se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N}', n_k > n_0$$

o equivalentemente,

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n_k > n_0.$$

Teorema 4.4. *Sean (x_n) sucesión y (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n). Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$. (Toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite).*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Probemos que:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0, |x_{n_k} - L| < \varepsilon.$$

Como $L = \lim x_n$, tenemos

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |x_n - L| < \varepsilon.$$

De la observación anterior, tenemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Como $n_k > n_{k_0}$, $\forall k > k_0$, concluimos que $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$, $\forall k > k_0$. □

Observación. Si (x_n) tiene dos subsucesiones tales que $\lim x_{n_k} \neq \lim x_{n_l}$, entonces (x_n) no es convergente.

Ejemplo: Sea $x_n = (-1)^n$. Consideremos las subsucesiones de los subíndices pares e impares de x_n: (x_{2k}) y (x_{2k-1}), respectivamente. Como para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$x_{2k} = 1 \quad \text{y} \quad x_{2k-1} = -1,$$

entonces $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k} = 1$ y $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = -1$. Por el Teorema 4.4, la sucesión $x_n = (-1)^n$ no es convergente.

Teorema 4.5 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea (x_n) una sucesión acotada. Entonces, existe una subsucesión (x_{n_k}) convergente de (x_n).*

(Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente)

Demostración. Como (x_n) es acotada, por el Teorema 4.3, basta construir una subsucesión monótona (creciente o decreciente).

Definamos el conjunto de subíndices

$$D = \{n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \geq x_p, \forall p > n\}.$$

Si $n \in D$, el término x_n se dice **destacado**. Usaremos el conjunto D para construir una subsucesión monótona.

Tenemos dos casos:

• Si D es infinito, entonces lo podemos escribir como

$$D = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots\}$$

donde $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Consideremos la sucesión (x_{n_k}) y veamos que es monótona.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Notemos que x_{n_k} y $x_{n_{k+1}}$ son destacados. Como $n_k < n_{k+1}$, entonces $x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$, es decir, (x_{n_k}) es decreciente.

• Si D es finito, entonces es acotado. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n$, $\forall n \in D$. Como x_{n_1} no es destacado (pues $n_1 \notin D$), tenemos que

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1 \wedge x_{n_2} > x_{n_1}.$$

Repetimos el argumento: como x_{n_2} no es destacado (pues $n_2 \notin D$), entonces

$$\exists n_3 \in \mathbb{N}, n_3 > n_2 \wedge x_{n_3} > x_{n_2}.$$

Así, contruimos inductivamente una sucesión (x_{n_k}) estrictamente creciente. □

Observación. La demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass dice que toda sucesión acotada, posee una subsucesión monótona, ya sea creciente o decreciente.

4.5 Algunas propiedades de límites de sucesiones

Teorema 4.6. *Sea (x_n) una sucesión convergente y $L = \lim x_n$. Entonces:*

1. *Si $b < L \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, x_n > b$.*
2. *Si $b > L \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, x_n < b$.*

Demostración. De la definición de límite, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

Para mostrar la primera propiedad, basta tomar $\varepsilon = L - b > 0$. Por otro lado, para mostrar la segunda propiedad, basta tomar $\varepsilon = b - L > 0$. □

Corolario 4.7. *Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones convergentes tales que $L = \lim x_n$ y $K = \lim y_n$.*

Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $x_n \leq y_n$, entonces $L \leq K$.

En particular, si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $x_n \leq b$, entonces $L \leq b$.

Demostración. Por contradicción, supongamos que $L > K$. Sea $b = \frac{L+K}{2}$, de modo que $K < b < L$. Por el Teorema 4.6, tenemos:

1. $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1, x_n > b$.
2. $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2, y_n < b$.

Para cualquier $n > \max\{n_1, n_2\}$, se cumple que $y_n < b < x_n$. Tomando $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$, encontramos una contradicción.

Para la segunda propiedad, basta tomar la sucesión constante $y_n = b$ y aplicar el resultado recién demostrado. $\square$

Observación. Si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones convergentes tales que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < y_n$ (desigualdad estricta), **no** implica que $\lim x_n < \lim y_n$.

En efecto, basta considerar $x_n = -\frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n}$. Claramente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < y_n$, pero $\lim x_n = 0 = \lim y_n$.

Teorema 4.8 (Teorema del Sandwich)**.** *Sean (x_n), (y_n) y (z_n) sucesiones tales que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $x_n \leq z_n \leq y_n$. Si $\lim x_n = \lim y_n = L$, entonces $\lim z_n = L$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $L = \lim x_n$ y $L = \lim y_n$, tenemos por definición que:

1. $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1, L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$.
2. $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2, L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon$.

Sea $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Entonces, para todo $n > n_3$ se cumple que

$$L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon,$$

donde la primera desigualdad se debe a 1., la segunda y la tercera a la hipótesis, y la última a 2. Concluimos que $\lim z_n = L$. $\square$

Corolario 4.9. *Sean (y_n) y (z_n) sucesiones tales que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $0 \leq z_n \leq y_n$. Si $\lim y_n = 0$, entonces $\lim z_n = 0$.*

Demostración. Basta tomar $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en el Teorema del Sandwich. $\square$

Teorema 4.10. *Sean (x_n) e (y_n) sucesiones tales que $\lim x_n = 0$ e (y_n) es acotada. Entonces, $\lim x_n y_n = 0$.*

Demostración. Demostremos el resultado por definición de límite. Sea $\varepsilon > 0$.

Como (y_n) es acotada, existe $C > 0$ tal que $|y_n| \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, notemos que como $\lim x_n = 0$, entonces $\lim |x_n| = 0$. Por la parte 2 del Teorema 4.6 con la sucesión $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ y $b = \frac{\varepsilon}{C}$, tenemos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |x_n| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Así, para cualquier $n > n_0$:

$$|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon,$$

es decir, $\lim x_n y_n = 0$. $\square$

Observación. Si $\lim x_n = 0$ e (y_n) no es acotada, no se puede concluir nada sobre $\lim x_n y_n$. Por ejemplo:

- Para $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n$, se tiene $\lim x_n y_n = 1$.
- Para $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2$, se tiene $(x_n y_n)$ diverge (no tiene límite).

Teorema 4.11. *Sean (x_n) e (y_n) sucesiones convergentes tales que $L = \lim x_n$ y $K = \lim y_n$. Entonces:*

1. $\lim(x_n \pm y_n) = L \pm K$.
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = L \cdot K$.
3. *Si* $K \neq 0$, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{L}{K}$.

Demostración. 1. Demostremos solamente que $\lim(x_n + y_n) = L + K$ (el otro caso es análogo y queda de ejercicio). Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, tenemos

(a) $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1, |x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(b) $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2, |y_n - K| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Gracias a (a) y (b), para cualquier $n > n_0$ se tiene

$$|(x_n + y_n) - (L + K)| = |x_n - L + y_n - K| \leq |x_n - L| + |y_n - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $\lim(x_n + y_n) = L + K$.

2. Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n y_n - LK| = |x_n y_n - Ly_n + Ly_n - LK| \leq |x_n y_n - Ly_n| + |Ly_n - LK|.$$

En particular,

$$0 \leq |x_n y_n - LK| \leq |x_n - L||y_n| + |L||y_n - K|.$$

Ahora, como $\lim x_n = L$, entonces $\lim |x_n - L| = 0$. Además, como (y_n) es convergente, entonces es acotada (Teorema 4.2). Por el Teorema 4.10, $\lim |x_n - L||y_n| = 0$.
De manera similar, $\lim |L||y_n - K| = 0$. Entonces, por la propiedad 1. ya demostrada, tenemos que

$$\lim \Big(|x_n - L||y_n| + |L||y_n - K| \Big) = 0$$

y concluimos que $\lim |x_n y_n - LK| = 0$ por el Teorema del Sandwich.

3. Como el punto anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{L}{K} \right| = \frac{|x_n K - Ly_n|}{|y_n||K|} = \frac{|x_n K - LK + LK - Ly_n|}{|y_n||K|},$$

entonces,

$$0 \leq \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{L}{K} \right| \leq \frac{|x_n - L||K| + |L||K - y_n|}{|K|} \cdot \frac{1}{|y_n|}.$$

Por los mismos argumentos de la parte anterior, tenemos que

$$\lim \frac{|x_n - L||K| + |L||K - y_n|}{|K|} = 0,$$

por lo que es suficiente mostrar que la sucesión $\left(\dfrac{1}{|y_n|} \right)$ es acotada y bien definida, al menos a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$.
En efecto, si $K > 0$, entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, y_n > \frac{K}{2}.$$

(Teorema 4.6, parte 1, con $b = \dfrac{K}{2} < K$). Si $K < 0$, entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, y_n < \frac{K}{2}.$$

(Teorema 4.6, parte 2, con $b = \dfrac{K}{2} > K$). En cualquier caso, tenemos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |y_n| > \frac{|K|}{2},$$

y por lo tanto

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|K|}.$$

□

4.6 Ejercicios

Ejercicio 4.1. Sea (x_n) una sucesión monótona tal que posee una subsucesión convergente. Demuestre que (x_n) es convergente.

Ejercicio 4.2. Considere la sucesión (x_n) definida por:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{x_n}},\ n \geq 1.$$

(a) Use inducción para demostrar que (x_n) es monótona.

(b) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} < x_n < 2$.
Hint: Para la cota superior, use inducción.

(c) Concluya que (x_n) es convergente y demuestre que $\sqrt{2} < \lim x_n < 2$.

Ejercicio 4.3. Sea $a > 0$. Demuestre que la sucesión $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ es convergente y calcule su límite. Para esto, siga los siguientes pasos:

(a) Demuestre que si $a > 1$, entonces (x_n) es decreciente.

(b) Demuestre que si $a < 1$, entonces (x_n) es creciente.

(c) Demuestre que (x_n) es acotada. Deduzca que existe $L = \lim x_n$.

(d) Considere la subsucesión $x_{n_k} = a^{1/k(k+1)}$ $(n_k = \frac{1}{k+1})$ y úsela para calcular L.

Hint: Le puede ser útil la identidad $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

Ejercicio 4.4. Demuestre que la sucesión $x_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}$ es convergente y calcule su límite. Para esto siga los siguientes pasos:

(a) Demuestre que si $x_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Demuestre que (x_n) es decreciente $\forall n \geq 3$.

Hint: Puede asumir que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Deduzca que (x_n) es convergente.

(d) Considere la subsucesión $x_{n_k} = (2k)^{1/2k}$ $(n_k = 2k)$ y úsela para demostrar que $L = \lim x_n$ satisface la ecuación $L^2 = L$. Deduzca el valor de L.

Ejercicio 4.5. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim n^p, p \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim \sqrt[n]{a}, a > 0$.

(c) $\lim \sqrt[n]{n}$.

(d) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(e) $\lim(\sqrt{n^2+n} - n)$.

Ejercicio 4.6. Sea $a > 0$. Se define la sucesión $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n^2]{a}}, n \in \mathbb{N}$. (Nota: $\sqrt[n^2]{a} = r \iff a = r^{n^2}$).

(a) Si $0 < a < 1$, pruebe que $\lim x_n = 1$.

Hint: Considere $h_n = x_n - 1$ y muestre que $h_n \to 0$ usando que $(1+h)^k \geq 1 + kh$, $\forall h > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y el Teorema del Sandwich.

(b) Si $a > 1$ o $a = 1$, pruebe que $\lim x_n = 1$.

(c) Sea $L > 0$. Si $a_n \to L$, demuestre que $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n^2]{a_n}} = 1$.

Hint: Puede usar que: $0 < x < y \implies 0 < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

(d) Si $a > b > 0$, calcule $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n^2]{a^n + b^n}}$.

Hint: Puede usar que $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Ejercicio 4.7. Sea $a > 0$. Considere (x_n) la sucesión definida, inductivamente, por

$$x_1 = 2a, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + x_n^2}{a+1}},\ n \geq 1.$$

(a) Demuestre por inducción que $x_n > a, \forall n \geq 1$.

(b) Demuestre que x_n es (estrictamente) decreciente y convergente a un $L \in \mathbb{R}$.

(c) Encuentre el valor de L, justificando su resultado.

Ejercicio 4.8. Sea $a > 0$, y sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones relacionadas por

$$x_n = f\Big(-\frac{y_n}{a^2 - y_n^2}\Big),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es una función que satisface las siguientes propiedades:

(i) $f(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$, $\forall x < 1$.

(ii) $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demuestre que:

(a) si $y_n \to a$ con $y_n < a$, entonces $\lim x_n = 0$.

(b) si $y_n \to -a$ con $y_n > -a$, entonces $\lim x_n = +\infty$.

Hint: Le será útil demostrar que si $y_n \to a$ (resp. $y_n \to -a$), entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, y_n > 0$ (resp. $y_n < 0$).

Ejercicio 4.9. Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y (x_n) una sucesión. Se dice que a es *punto de acumulación* de (x_n) si existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = a$. Demuestre que:

$$a \in \mathbb{R} \text{ es punto de acumulación de } (x_n) \iff \forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n > k, |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ejercicio 4.10. Definición. Una sucesión (x_n) se dice que es una *sucesión de Cauchy* si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n > n_0, |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

(a) Pruebe que una sucesión de Cauchy no puede tener dos puntos de acumulación distintos.

(b) Pruebe que toda sucesión de Cauchy es acotada.

(c) Pruebe que si una sucesión de Cauchy (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente, entonces (x_n) converge.

(d) Pruebe que: (x_n) es convergente $\iff$ (x_n) es de Cauchy.

(e) Sea (x_n) una sucesión de Cauchy e (y_n) una sucesión tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Pruebe que (y_n) también es una sucesión de Cauchy y que $\lim x_n = \lim y_n$.

Ejercicio 4.11. Sean $a > 1$ y $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que

(a) $\lim \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

(b) $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

(c) $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Hint: Recuerde (o pruebe si no lo ha hecho) que si (x_n) es una sucesión tal que $x_n > 0$ y $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, entonces $\lim x_n = 0$.

Ejercicio 4.12. Sean $a, b > 0$. Se definen las sucesiones (x_n) y (y_n) inductivamente como

$$x_1 = \sqrt{ab}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}, n \geq 1 \quad , y_1 = \frac{a+b}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, n \geq 1.$$

El objetivo es demostrar que (x_n) y (y_n) son convergentes y que $\lim x_n = \lim y_n$.

(a) Muestre que $\forall x, y > 0, \sqrt{x \cdot y} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

(b) Demuestre que (x_n) (resp. (y_n)) es monótona creciente (resp. decreciente) y acotada (resp. acotada). **Hint:** Use inducción.

(c) Deduzca que (x_n) y (y_n) son convergentes, y que $\lim x_n = \lim y_n = L$.

(d) Muestre que $\sqrt{a \cdot b} \leq L \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Ejercicio 4.13. Definición. Sea (x_n) sucesión.

• Se dice que (x_n) **tiende a** $+\infty$ si $\forall C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, x_n > C$.
Se denota: $\lim x_n = +\infty$ o $x_n \to +\infty$.

• Se dice que (x_n) **tiende a** $-\infty$ si $\forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, x_n < -c$.
Se denota: $\lim x_n = -\infty$ o $x_n \to -\infty$.
Demuestre que:

(a) Si $\lim x_n = +\infty$, entonces (x_n) no es acotada superiormente.

(b) Si (x_n) no es acotada superiormente, entonces no necesariamente se tiene $\lim x_n = +\infty$.

(c) Si (x_n) es monótona creciente y no acotada superiormente, entonces $\lim x_n = +\infty$.

Ejercicio 4.14. Sean (x_n) e (y_n) sucesiones. Entonces:

(a) Si $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) acotada inferiormente, entonces $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(b) Si $\lim x_n = +\infty$ y $\exists c > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $y_n > c$, entonces $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(c) Si $\exists c > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > c, y_n > 0$ y $\lim y_n = 0$, entonces $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

(d) Si (x_n) es acotada y $\lim y_n = +\infty$, entonces $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

CAPÍTULO 5

SERIES

Queremos estudiar "sumas infinitas" de la forma

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Para esto, necesitamos darle sentido a

$$\sum a_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

5.1 Definición y ejemplos

Definición 5.1 (Sumas parciales)**.** Sea (a_n) una sucesión. Se define inductivamente la sucesión de *sumas parciales* (s_n) como:

$$s_1 = a_1, \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

En otras palabras,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Definición 5.2 (Serie)**.** Sea (a_n) una sucesión y (s_n) la sucesión de sumas parciales asociada a (a_n). Se define la *serie* de término general a_n como el límite de (s_n), es decir:

$$\sum a_n = \lim s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si existe $s = \lim s_n$, decimos que $\sum a_n$ *converge* y $s = \sum a_n$ es la *suma* o *valor* de la serie.
Si (s_n) no converge, decimos que $\sum a_n$ *diverge* o *no converge.*

Notación: Usualmente, una serie $\sum a_n$ se denota como:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.

Observación. En general, el primer término no tiene relevancia a la hora de analizar la convergencia de la serie. Sin embargo, cuando importe el valor de la serie, se especifica el comienzo de las sumas parciales.

Observación. Notemos que si $a_n \geq 0$, entonces (s_n) es monótona creciente. En efecto, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

En consecuencia, si $a_n \geq 0$:

$$\sum a_n \text{ converge } \iff (s_n) \text{ es acotada.}$$

Ejercicio 1. Sean $a_n \geq 0$ y (a_{n_k}) subsucesión de (a_n). Entonces:

$$\sum a_n \text{ converge } \Longrightarrow \sum a_{n_k} \text{ converge.}$$

Ejercicio 2. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes, entonces $\sum (a_n + cb_n)$ converge y

$$\sum (a_n + cb_n) = \sum a_n + c \sum b_n.$$

Ejemplos:

1. Serie geométrica: $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$, $a \in \mathbb{R}$.

   Si $a = 1$, entonces $s_n = n + 1$, por lo tanto la serie diverge.

   Sea $a \neq 1$. Notemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

   $$s_n = a + \cdots + a^n$$

   y

   $$as_n = a^2 + \cdots + a^{n+1},$$

   de donde obtenemos $s_n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$. Así, (s_n) converge si y solo si $|a| < 1$.

   Entonces, la serie $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ es convergente si y solo si $|a| < 1$. En particular:

   $$\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1.$$

2. Serie alternada: $\sum (-1)^{n+1}$.

   Como

   $$s_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

   entonces (s_n) diverge y, por lo tanto, también la serie $\sum (-1)^{n+1}$.

3. $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   Usando fracciones parciales, tenemos que

   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

   Expandiendo la suma:

   $$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Entonces, $\lim s_n = 1$ y, en consecuencia, la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

En general, dada (a_n) sucesión, una serie de la forma $\sum(a_n - a_{n+1})$ se llama <u>serie telescópica</u>, la cual converge si y solo si (a_n) converge. Además:

$$\sum(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim a_n.$$

4. <u>Serie armónica:</u> $\sum \frac{1}{n}$.

   Supongamos que esta serie es convergente. Por el Ejercicio 1 de arriba, las series $\sum \frac{1}{2n}$ y $\sum \frac{1}{2n-1}$ también son convergentes.

   Sean (s_n), (t_n) y (u_n) las sucesiones de sumas parciales de $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{2n}$ y $\sum \frac{1}{2n-1}$, respectivamente.

   Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \\ &= t_n + u_n. \end{aligned}$$

   En particular, tomando límite cuando $n \to +\infty$, obtenemos

$$s = t + u,$$

   donde $s = \sum \frac{1}{n}$, $t = \sum \frac{1}{2n}$ y $u = \sum \frac{1}{2n-1}$.
   Por el Ejercicio 2, $t = \frac{s}{2}$ y, por lo tanto, $u = t = \frac{s}{2}$.
   Pero,

$$\begin{aligned} u - t &= \lim(u_n - t_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big) \\ &> 0, \end{aligned}$$

   lo que es una contradicción.

   Conclusión: la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

5.2 Algunos criterios de convergencia de series

Teorema 5.1 (Criterio del n-ésimo término)**.** *Si* $\sum a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

Demostración. Notemos que para todo $n > 1$:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Entonces, si $s = \lim s_n$, se tiene

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Observación. El resultado anterior entrega un criterio para determinar que una serie es divergente: Si (a_n) no converge o $\lim a_n \neq 0$, entonces $\sum a_n$ diverge.

Por otro lado, la recíproca no es siempre cierta: Si (a_n) es tal que $\lim a_n = 0$, **no implica** que $\sum a_n$ converge. Por ejemplo: $\sum \frac{1}{n}$.

Teorema 5.2 (Criterio de comparación)**.** *Sean $a_n, b_n \geq 0$. Si $\exists c > 0$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $a_n \leq cb_n$, entonces:*

1. $\sum b_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ *converge.*
2. $\sum a_n$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ *diverge.*

Demostración. Como la propiedad 2 es la recíproca de la propiedad 1, solo probaremos esta última.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_n \leq cb_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (¿Por qué?).

Sean (s_n) y (t_n) las sucesiones de sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente, donde suponemos que (t_n) es convergente.

Como $a_n \geq 0$, basta probar que (s_n) es acotada. De la hipótesis, deducimos fácilmente que

$$s_n \leq ct_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esta desigualdad, como (t_n) es convergente, es acotada y, por ende, también lo es (s_n). □

Ejercicio. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.

Sea $\alpha \leq 1$. En este caso, se cumple que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ya vimos que $\frac{1}{n}$ diverge. Por la parte 2 del Criterio de comparación, tenemos que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Sea ahora $\alpha > 1$ y (s_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Como es una serie de términos no negativos, basta probar que (s_n) es acotada.

Se puede probar por inducción que $n \leq 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Ejercicio). Entonces,

$$s_n \leq s_{2^n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Acotemos superiormente s_{2^n-1}:

$$\begin{aligned}
s_{2^n-1} \;=\; & 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \\
& + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \\
& + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha} \\
& + \frac{1}{16^\alpha} + \frac{1}{17^\alpha} + \cdots + \frac{1}{31^\alpha} \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{2^n-1} &\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \frac{16}{16^\alpha} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^k.
\end{aligned}$$

Como $2 < 2^\alpha$, la serie geométrica

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^n$$

converge y su valor es $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$.

Finalmente, obtenemos que

$$s_n \leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir, (s_n) es acotada.

5.3 Series absoluta y condicionalmente convergentes

Definición 5.3 (Serie absolutamente convergente)**.** Sea (a_n) una sucesión. La serie $\sum a_n$ se dice *absolutamente convergente* si $\sum |a_n|$ converge.

Definición 5.4 (Serie condicionalmente convergente)**.** Sea (a_n) una sucesión. La serie $\sum a_n$ se dice *condicionalmente convergente* si $\sum a_n$ converge y $\sum |a_n|$ diverge.

Ejemplo. Si $|a| < 1$, entonces $\sum a^n$ es absolutamente convergente (Notar que $|a^n| = |a|^n$).

Ejemplo. Sea $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Como

$$\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n},$$

entonces no es absolutamente convergente. Sin embargo, probaremos que sí es convergente y, por lo tanto, condicionalmente convergente.

Teorema 5.3 (Criterio de Leibniz)**.** *Sea (a_n) una sucesión monótona decreciente tal que $\lim a_n = 0$. Entonces, la serie $\sum (-1)^{n+1}a_n$ converge.*

Demostración. Sea (s_n) la sucesión de sumas parciales de $\sum (-1)^{n+1}a_n$. Probaremos que las subsucesiones (s_{2n}) y (s_{2n-1}) convergen al mismo límite, lo que será suficiente para demostrar el resultado gracias al siguiente hecho (que queda propuesto como ejercicio):

Ejercicio. Sea (x_n) una sucesión tal que las subsucesiones (x_{2n}) y (x_{2n-1}) son convergentes y $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = L$. Entonces, (x_n) es convergente y $\lim x_n = L$.

Notemos que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \geq s_{2(n-1)}$$

y

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2(n-1)+1},$$

es decir, (s_{2n}) es creciente y (s_{2n-1}) es decreciente.

Además, como (a_n) es decreciente y $\lim a_n = 0$, entonces $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así,

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_n \leq s_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Juntando lo anterior, podemos observar que tenemos el orden siguiente:

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

En particular, (s_{2n}) y (s_{2n-1}) son acotadas y, por lo tanto, convergentes (pues son monótonas). Además, pasando al límite en la identidad

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_n,$$

obtenemos que $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$, pues $\lim a_n = 0$. □

Observación. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente, pues converge por el criterio de Leibniz.

Teorema 5.4. *Sea* (a_n) *una sucesión. Si* $\sum |a_n|$ *converge, entonces* $\sum a_n$ *también converge. (Toda serie absolutamente convergente es convergente)*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$p_n = \max\{0, a_n\} \quad (\textbf{parte positiva} \text{ de } a_n)$$

y

$$q_n = \max\{-a_n, 0\} \quad (\textbf{parte negativa} \text{ de } a_n).$$

Notemos que:

$$p_n, q_n \geq 0, \quad p_n + q_n = |a_n| \quad \text{y} \quad p_n - q_n = a_n.$$

En particular,

$$0 \leq p_n \leq |a_n| \quad \text{y} \quad 0 \leq q_n \leq |a_n|.$$

Como la serie $\sum |a_n|$ es convergente, usando el Criterio de comparación (Teorema 5.2), concluimos que $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son convergentes. En consecuencia,

$$\sum a_n = \sum (p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$$

es convergente. □

Observación. Debido a que la serie $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente, la recíproca del teorema anterior no es cierta.

5.4 Criterios de convergencia

A continuación veremos algunos criterios de convergencia que no requieren comparación con una serie cuya convergencia es conocida, sino que depende solamente de sus términos. Comencemos con un lema:

Lema 5.5. *Sea* (b_n) *una sucesión tal que* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *y la serie* $\sum b_n$ *es absolutamente convergente. Entonces:*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ acotada } \Longrightarrow \sum a_n \text{ absolutamente convergente.}$$

Demostración. Como $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ es acotada, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$\Big| a_n| \leq C|b_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el Criterio de comparación, como $\sum |b_n|$ converge, entonces $\sum |a_n|$ converge. □

Observación. En el lema anterior, basta pedir que $\lim \frac{a_n}{b_n}$ exista.

Teorema 5.6 (Criterio de d'Alambert)**.** *Sea* (a_n) *una sucesión tal que*

$$\exists c \in (0,1), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq c \wedge a_n \neq 0.$$

Entonces, la serie $\sum a_n$ *es absolutamente convergente.*

Demostración. Como tenemos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c = \frac{c^{n+1}}{c^n}, \quad \forall n > n_0,$$

entonces

$$\frac{|a_{n+1}|}{c^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{c^n}, \quad \forall n > n_0, .$$

Esto último implica que la sucesión $\left(\frac{|a_n|}{c^n}\right)$ es decreciente a partir de $n_0 \in \mathbb{N}$. En particular, esto quiere decir que $\left(\frac{|a_n|}{c^n}\right)$ es acotada.

Como $\sum c^n$ es convergente (pues $0 < c < 1$), por el Lemma 5.5, la serie $\sum |a_n|$ converge. □

Observación.

- El resultado es válido si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. (**Ejercicio**)
- Si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, entonces $\sum a_n$ diverge.
- Si $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, $\sum a_n$ puede ser convergente o divergente.

  En efecto, este es el caso de $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n}$.

Teorema 5.7 (Criterio de Cauchy)**.** *Sea (a_n) una sucesión tal que*

$$\exists c < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \sqrt[n]{|a_n|} \leq c.$$

Entonces, $\sum a_n$ es absolutamente convergente.

Demostración. Basta notar que $|a_n| \leq c^n$, $\forall n > n_0$ y que $\sum c^n$ es convergente. Concluimos con el Criterio de comparación o el Lema 5.5. □

Observación.

- El resultado es válido si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. (**Ejercicio**)
- Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, entonces $\sum a_n$ diverge.
- Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, $\sum a_n$ puede ser convergente o divergente.

  Nuevamente, este es el caso de $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n}$, pues $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

5.5 Series conmutativamente convergentes

En esta sección, veremos condiciones para que el valor de una serie convergente no se vea afectada por reordenamientos de sus términos.

Definición 5.5 (Serie conmutativamente convergente)**.** Sea (a_n) una sucesión. La serie $\sum a_n$ se dice *conmutativamente convergente* si para toda biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum b_n$ converge, donde $b_n = a_{\varphi(n)}$.

La sucesión (b_n) se dice un **reordenamiento** de (a_n).

Observación. De la definición, una serie conmutativamente convergente es convergente. En efecto, basta considerar $\varphi(n) = n$ (la función identidad). Sin embargo, no se puede asegurar que $\sum b_n = \sum a_n$, donde (b_n) es un reordenamiento de (a_n).

Ejemplo: Sabemos que la serie $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es convergente. Llamemos

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad s = \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Se puede probar que $s = \ln 2$. Notemos que

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots,$$

y

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots,$$

donde los “ceros” los hemos agregado por conveniencia para observar que, al sumar estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

La sucesión (b_n) dada por

$$(b_n) = \left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{6}, \cdots\right)$$

es un reordenamiento de (a_n) y

$$\sum b_n = \frac{3s}{2}.$$

En particular, $\sum a_n \neq \sum b_n$.

Veremos que solamente las series absolutamente convergentes son independientes del reordenamiento de sus términos.

Teorema 5.8. *Sea (a_n) una sucesión. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum a_n$ es conmutativamente convergente.*

Además, para todo reordenamiento (b_n) de (a_n), se tiene que $\sum a_n = \sum b_n$.

Demostración. Probaremos el resultado primero para $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y luego el caso general.

Sea (b_n) un reordenamiento de (a_n), es decir, $b_n = a_{\varphi(n)}$ con $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva.

Sean (s_n) y (t_n) las sucesiones de sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum b_n$, respectivamente. Notemos que en este caso, (s_n) y (t_n) son monótonas crecientes.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $m = \max\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Entonces:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{m} a_k = s_m.$$

Como (s_n) es convergente, es acotada y también lo es (t_n). Así, $\sum b_n$ converge y

$$\sum b_n \leq \sum a_n.$$

Recíprocamente, notemos que $a_k = b_{\varphi^{-1}(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. De manera similar, para $m \in \mathbb{N}$, sea $p = \max\{\varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(m)\}$, con lo que obtenemos

$$s_m = \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} b_{\varphi^{-1}(k)} \leq \sum_{k=1}^{p} b_k = t_p,$$

de donde $\sum a_n \leq \sum b_n$.

Hasta ahora, probamos que

$$\sum b_n = \sum a_n, \quad \text{si } a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veamos el caso general. Como $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son convergentes, donde p_n y q_n con las partes positiva y negativa de a_n, respectivamente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n, q_n \geq 0$ y

$$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n.$$

Sea (b_n) un reordenamiento de (a_n). Denotemos por (u_n) y (v_n) los reordenamientos resultantes de (p_n) y (q_n), respectivamente. Como $p_n, q_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo ya demostrado tenemos que

$$\sum u_n = \sum p_n \quad \text{y} \quad \sum v_n = \sum q_n.$$

Por lo tanto, $\sum b_n$ es convergente y

$$\sum b_n = \sum u_n - \sum v_n = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n,$$

lo que termina la demostración. □

Teorema 5.9. *Sea (a_n) una sucesión y supongamos que $\sum a_n$ es condicionalmente convergente. Entonces, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe un reordenamiento (b_n) de (a_n) tal que $\sum b_n = c$.*

Demostración. Sean p_n y q_n las partes positiva y negativa de a_n, respectivamente. Notemos que:

- Como $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$. En consecuencia, $\lim p_n = \lim q_n = 0$.
- Como, además, $\sum |a_n|$ es divergente, entonces $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son divergentes. En particular, como las sucesiones de sumas parciales de estas series son monótonas crecientes, se tiene

$$\sum p_n = +\infty \quad \text{y} \quad \sum q_n = +\infty.$$

Sea $c \in \mathbb{R}$. Construyamos un reordenamiento (b_n) de (a_n) tal que $\sum b_n = c$.

Procedemos de la forma siguiente:

- Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ el menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} > c.$$

  Notemos que esto es posible gracias a que $\sum p_n = +\infty$.
- Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ el menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} < c.$$

  Notemos que esto es posible gracias a que $\sum q_n = +\infty$.
- Sea $n_3 \in \mathbb{N}$ el menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > c.$$

- Sea $n_4 \in \mathbb{N}$ el menor índice tal que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} > c.$$

Definimos (b_n) con el procedimiento anterior (agregando los términos en el orden escrito). Sea $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ y probemos que $\lim t_n = c$.

Por construcción, para todo $k \in \mathbb{N}$ impar se tiene

$$t_{n_{k+1}} < c < t_{n_k}.$$

Además,

$$0 < t_{n_k} - c = p_{n_k} + t_{n_k - 1} - c \leq p_{n_k},$$

pues $t_{n_k-1} \leq c$, y

$$0 < c - t_{n_{k+1}} = c - (-q_{n_{k+1}} + t_{n_{k+1}-1}) = q_{n_{k+1}} + c - t_{n_{k+1}-1} \leq q_{n_{k+1}},$$

pues $t_{n_{k+1}-1} \geq c$. Como $\lim\limits_{k\to+\infty} p_{n_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} q_{n_{k+1}} = 0$, por el Teorema del Sandwich,

$$\lim_{k\to+\infty} t_{n_k} = c.$$

Hasta este punto, hemos probado que la subsucesión (t_{n_k}) es convergente a c. Para concluir que (t_n) converge a este límite, basta notar que, para todo $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k < n < n_{k+1}$:

- Si $k \in \mathbb{N}$ es impar, entonces $t_{n_{k+1}} < t_n < t_{n_k}$;
- Si $k \in \mathbb{N}$ es par, entonces $t_{n_k} < t_n < t_{n_{k+1}}$.

De esto último, deducimos que $\lim t_n = c$. □

Corolario 5.10. *Sea (a_n) una sucesión tal que $\sum a_n$ es convergente. Entonces,*

$$\sum a_n \textit{ es absolutamente convergente} \iff \sum a_n \textit{ es conmutativamente convergente.}$$

5.6 Ejercicios

Ejercicio 5.1. Sea (a_n) una sucesión. Demuestre que

$$\sum a_n \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Hint: Estudie si (s_n) es sucesión de Cauchy.

Ejercicio 5.2. Sea (a_n) una sucesión tal que $a_n \geq 0$. Demuestre que

(a) $\sum a_n$ converge $\iff \sum \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

(b) $\sum a_n$ converge $\implies \sum a_n^2$ converge. ¿Es cierto el recíproco? Justifique con un ejemplo.

(c) $\sum a_n$ converge y $a_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \implies \sum \frac{a_n}{1-a_n}$ converge.

(d) $\sum a_n$ converge $\implies \sum (a_n)^n$ converge.

Ejercicio 5.3. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de términos no negativos tales que $\lim \frac{a_n}{b_n} > 0$. Demuestre que:

$$\sum a_n \text{ converge } \iff \sum b_n \text{ converge .}$$

¿Qué se puede concluir si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$?

Ejercicio 5.4. Sea (a_n) una sucesión monótona estrictamente decreciente. Demuestre que si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim n a_n = 0$.

Ejercicio 5.5. Sea (a_n) una sucesión tal que $a_n \geq 0$. Demuestre que:

$$\sum a_n \text{ converge } \implies \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ converge.}$$

Ejercicio 5.6. Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ las siguientes series son convergentes:

(a) $\sum n^3 x^n$.

(b) $\sum \frac{2^n}{n!} x^n$.

(c) $\sum \frac{2^n}{n^2} x^n$.

(d) $\sum \frac{n^3}{3^n} x^n$.

CAPÍTULO 6

TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}$

6.1 Conjuntos abiertos

Definición 6.1 (Punto interior)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es *punto interior* de X si

$$\exists \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X.$$

El conjunto de los puntos interiores de X se denomina *Interior* de X:

$$\mathrm{int}X := \{a \in \mathbb{R} \ / \ a \text{ es punto interior de } X\}.$$

Observación. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, se tiene $\mathrm{int}X \subset X$.

Definición 6.2 (Conjunto abierto)**.** Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se dice *abierto* si $X = \mathrm{int}X$, es decir:

$$\forall a \in X, \exists \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X.$$

Definición 6.3 (Vecindad)**.** Sea $a \in \mathbb{R}$. Un conjunto $V \subset \mathbb{R}$ se dice *vecindad* de a si existe A abierto tal que $a \in A$ y $A \subset V$. Equivalentemente:

$$\exists \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V.$$

Observación.

- $\emptyset$, $\mathbb{R}$ son abiertos.
- Si $a < b$, los intervalos (a, b), $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$ son conjuntos abiertos.
- Si $a < b$, los intervalos $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$ y $[a, +\infty)$ no son conjuntos abiertos.
- El conjunto de los números racionales no es un conjunto abierto. En efecto, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, para todo $a \in \mathbb{Q}$ y todo $\varepsilon > 0$, tenemos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$. Es decir, $\mathrm{int}\mathbb{Q} = \emptyset$.

  Asimismo, $\mathrm{int}\mathbb{I} = \emptyset$ y, por lo tanto, el conjunto de los números irracionales no es un conjunto abierto.

Teorema 6.1. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ *abiertos* $\implies$ $A_1 \cap A_2$ *abierto.*
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *abiertos* $\implies$ $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *abierto.*

Demostración.

1. Sea $a \in A_1 \cap A_2$. Como A_1 y A_2 son abiertos, tenemos que:
   - $\exists \varepsilon_1 > 0, (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset A_1$.
   - $\exists \varepsilon_2 > 0, (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subset A_2$.

Definimos $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Entonces,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1) \cap (a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2) \subset A_1 \cap A_2,$$

es decir, $a \in \operatorname{int}(A_1 \cap A_2)$.

2. Llamemos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y sea $a \in A$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_{n_0}$. Como A_{n_0} es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A_{n_0} \subset A.$$

Concluimos que $a \in \operatorname{int} A$.

□

Observación. • La intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos, es un conjunto abierto. Sin embargo, la intersección infinita de conjuntos abiertos, no es necesariamente un conjunto abierto. En efecto:

$$A_n = \Big(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

• La segunda propiedad se puede generalizar a una familia arbitraria de conjuntos abiertos.

6.2 Conjuntos cerrados

Definición 6.4 (Punto adherente)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$. Decimos que a es *punto adherente* a X si

$$\forall \varepsilon > 0, (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

El conjunto de los puntos adherentes a X se denomina *Clausura* o *Adherencia* de X:

$$\overline{X} := \{a \in \mathbb{R} / a \text{ es adherente a } X\}.$$

Observación. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, se tiene $X \subset \overline{X}$.

La siguiente proposición nos entrega una caracterización de los puntos adherentes en términos de sucesiones.

Proposición 6.2. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces:*

$$a \in \overline{X} \iff \exists (x_n) \subset X, x_n \to a.$$

Demostración. Sea $a \in \overline{X}$ y construyamos una sucesión (x_n) de elementos de X que convergen a a. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ en la definición de punto adherente, tenemos que

$$\Big(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\Big) \cap X \neq \emptyset.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in X$ tal que $y_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$. Esto define una sucesión $(y_n) \subset X$ tal que

$$|y_n - a| < \frac{1}{n},$$

lo que implica que $\lim y_n = a$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$ y probemos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión tal que $\lim x_n = a$. Entonces, por definición de límite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_0} - a| < \varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$x_{n_0} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Como además $x_{n_0} \in X$, se deduce que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. □

Corolario 6.3. *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, se tiene $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*

Demostración. Solo tenemos que demostrar que $\overline{\overline{X}} \subset \overline{X}$. Sea $a \in \overline{\overline{X}}$. Por la Proposición 6.2, basta construir una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $a = \lim x_n$.

Por la Proposición 6.2 aplicada a $a \in \overline{\overline{X}}$, tenemos que existe $(y_n) \subset \overline{X}$ tal que $\lim y_n = a$. Además, por definición de punto adherente, para cada $y_n \in \overline{X}$ tenemos

$$\left(y_n - \frac{1}{n}, y_n + \frac{1}{n}\right) \cap X \neq \emptyset.$$

Esto implica que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n}.$$

Como

$$\lim \left(y_n - \frac{1}{n}\right) = \lim \left(y_n + \frac{1}{n}\right) = a,$$

por el Teorema del Sandwich, se deduce que $\lim x_n = a$. □

Definición 6.5 (Conjunto cerrado)**.** Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se dice *cerrado* si $X = \overline{X}$.

Observación.

- Si $a < b$, los intervalos $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ son conjuntos cerrados.
- Si $a < b$, los intervalos $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ no son conjuntos cerrados.
- Se tiene que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$. En particular, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ no son conjuntos cerrados. En efecto, por la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que

  $$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \quad \wedge \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset,$$

  es decir, $\forall a \in \mathbb{R}$, se tiene que $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ y $a \in \overline{\mathbb{I}}$.

Proposición 6.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces:*

$$X \textit{ es cerrado} \iff \big(\forall (x_n) \subset X, x_n \to a \implies a \in X\big).$$

Demostración. Supongamos que $X \subset \mathbb{R}$ es cerrado y probemos la propiedad de la derecha de la equivalencia. Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión tal que $\lim x_n = a$. Por la Proposición 6.2, tenemos que $a \in \overline{X}$, pero como X es cerrado, $\overline{X} = X$ y, por ende, $a \in X$.

Supongamos ahora que se cumple la propiedad de la derecha de la equivalencia y sea $a \in \overline{X}$. Por la Proposición 6.2, existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $\lim x_n = a$. Por la propiedad, esto implica directamente que $a \in X$ y, así, $\overline{X} \subset X$. □

Observación. Esta última propiedad quiere decir que si X es un conjunto cerrado, entonces contiene a los límites de las sucesiones de elementos de X.

Teorema 6.5. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces:*

$$X \textit{ es cerrado} \iff X^c \textit{ es abierto.}$$

Demostración. Notemos que por definición:

$$\begin{aligned} a \notin \overline{X} &\iff \exists \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X = \emptyset \\ &\iff \exists \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X^c \\ &\iff a \in \operatorname{int}(X^c). \end{aligned}$$

- Si X es cerrado y $a \in X^c$, entonces $a \notin \overline{X}$ (pues $\overline{X} = X$), es decir, $a \in \operatorname{int}(X^c)$.
- Si X^c es abierto y $a \in \overline{X}$, entonces $a \notin X^c$ (pues $\operatorname{int}(X^c) = X^c$), es decir, $a \in X$.

□

Teorema 6.6. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$C_1, C_2 \subset \mathbb{R}$ cerrados $\implies$ $C_1 \cup C_2$ cerrado.*

2. $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cerrados* $\implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *cerrado.*

Demostración. Como consecuencia de los Teoremas 6.1 y 6.5:

1. Basta notar que $(C_1 \cup C_2)^c = C_1^c \cap C_2^c$ es un conjunto abierto.
2. Basta notar que $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c$ es un conjunto abierto.

□

Observación.
- $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son los únicos conjuntos abiertos y cerrados.
- La unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado. Sin embargo, la unión infinita de conjuntos cerrados, no es necesariamente un conjunto cerrado. En efecto:

$$C_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = (0, 2).$$

- La segunda propiedad se puede generalizar a una familia arbitraria de conjuntos cerrados.

6.3 Puntos de acumulación

Definición 6.6 (Punto de acumulación)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$. Decimos que a es *punto de acumulación* de X si

$$\forall \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\} \cap X \neq \emptyset.$$

Denotamos el conjunto de los puntos de acumulación de X como

$$X' := \{a \in \mathbb{R} \ / \ a \text{ es punto de acumulación de } X\}.$$

Definición 6.7 (Punto aislado)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$. Decimos que $a \in X$ es *punto aislado* de X si no es punto de acumulación.

Ejemplos:

- Sea $X = (a, b] \cup \{c\}$, con $c > b$. Entonces, $X' = [a, b]$ y c es punto aislado de X.
- Sea $X = [a, b) \cup (b, c)$. Entonces, $X' = [a, c]$. Notar que b es punto de acumulación y no hay puntos aislados.
- Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
- Se tiene que $\mathbb{Z}' = \emptyset$, y todos los enteros son puntos aislados.

De forma similar a los puntos adherentes, la siguiente proposición nos entrega una caracterización de los puntos de acumulación en términos de sucesiones.

Proposición 6.7. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces:*

$$a \in X' \iff \exists (x_n) \subset X \setminus \{a\}, x_n \to a.$$

Demostración. La demostración es idéntica a la Proposición 6.2. □

Como consecuencia directa, tenemos

Corolario 6.8. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces:*

$$a \in X' \iff a \in \overline{X \setminus \{a\}}.$$

Demostración. Basta aplicar las Proposiciones 6.2 y 6.7 al conjunto $X \setminus \{a\}$. □

Teorema 6.9. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ infinito y acotado. Entonces $X' \neq \emptyset$.*

(Todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene al menos un punto de acumulación)

Demostración. Por la Proposición 6.7, basta mostrar que existe una sucesión convergente de elementos de X tal que ninguno de sus términos coincide con su límite.

Como X es infinito, contiene un subconjunto Y infinito numerable. Denotemos $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Como X es acotado, también lo es Y y, en consecuencia, la sucesión (x_n). Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión (x_{n_k}) convergente a algún $a \in \mathbb{R}$, esto es, $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$.

Hasta el momento, tenemos que $a \in \overline{X}$. Si $x_{n_k} \neq a$, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $a \in X'$. En caso contrario, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_{k_0}} = a$, entonces consideramos la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}'}$, donde $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{k_0\}$. Como $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}'} x_{n_k} = a$ y $x_{n_k} \neq a$, $\forall k \in \mathbb{N}'$, concluimos que $a \in X'$. □

Observación. En el Teorema 6.9, ambas hipótesis sobre X son importantes:

- Si $X \subset \mathbb{R}$ es finito, entonces $X' = \emptyset$.
  En efecto, si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, podemos definir
  $$\delta := \frac{1}{2}\min\big\{|x_i - x_j| \ / \ \text{con } i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\big\}.$$
  Notemos que $\delta > 0$ está bien definido, pues X es finito. Además,
  $$|x_i - x_j| > \delta, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \text{con } i \neq j,$$
  lo que implica que
  $$(x_i - \delta, x_i + \delta) \setminus \{x_i\} \cap X = \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$
- Si $X \subset \mathbb{R}$ es infinito y no acotado, puede pasar que $X' = \emptyset$.
  Ejemplo: $X = \mathbb{N}$.

6.4 Conjuntos compactos

Definición 6.8 (Conjunto compacto)**.** Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se dice *compacto* si es cerrado y acotado.

Ejemplos:

- $[a, b]$ es compacto.
- $(a, b]$ no es compacto.
- Si $X \subset \mathbb{R}$ finito, es compacto.
- $\mathbb{R}$ no es compacto.
- $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ no son compactos.

Teorema 6.10. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces:*

$$X \text{ es compacto} \iff \forall (x_n) \subset X, \exists (x_{n_k}), x_{n_k} \to a \in X.$$

"X es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de X posee una subsucesión convergente a un punto de X"

Demostración. Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión con X compacto. Como X es un conjunto acotado, (x_n) es una sucesión acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $\lim x_{n_k} = a$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Como X es cerrado, se tiene que $a \in X$.

Sea $X \subset \mathbb{R}$ con la propiedad de la derecha de la equivalencia y probemos que es compacto.

- Si X no es acotado, entonces:
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, |x_n| > n.$$
  Construimos así una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $\lim |x_n| = +\infty$. Por lo tanto, toda subsucesión de (x_n) es divergente, lo que contradice la propiedad. Así, X es acotado.

- Sea $a \in \overline{X}$. Por la Proposición 6.2, existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $\lim x_n = a$. Por la propiedad, tomando a (x_n) como subsucesión, deducimos que $a \in X$. Así, X es cerrado.

Por los dos puntos anteriores, X es compacto. □

Corolario 6.11. *Si $X \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces X posee un elemento mínimo y máximo. Esto es:*

$$\exists x_1, x_2 \in X, \forall x \in X, x_1 \leq x \leq x_2.$$

Demostración. Comencemos notando que como X es acotado, por el axioma del supremo, existen $b = \sup X$ y $a = \inf X$. Entonces, basta probar que $a, b \in X$.

Afirmamos que $a, b \in \overline{X}$. En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\exists x \in X, b - \varepsilon < x \leq b.$$

Esto implica que

$$\forall \varepsilon > 0, (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

De forma análoga, se comprueba que $a \in \overline{X}$.

Finalmente, concluimos que $a, b \in X$ usando el hecho de que X es cerrado ($\overline{X} = X$). □

6.5 Ejercicios

Ejercicio 6.1. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Demuestre que X es abierto si y sólo si

$$\forall a \in X, \forall (x_n) \subset \mathbb{R}, x_n \to a, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \implies x_n \in X.$$

Ejercicio 6.2. Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$. Demuestre que $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$ y $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$. Dé un ejemplo tal que $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \neq \text{int}(X \cup Y)$.

Ejercicio 6.3. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Demuestre que $\overline{X}$ es el conjunto cerrado más pequeño (en el sentido de la inclusión) que contiene a X, es decir, si $Y \subset \mathbb{R}$ es cerrado y $X \subset Y$, entonces $\overline{X} \subset Y$.

Ejercicio 6.4. Sean $X, Y \subset \mathbb{R}$. Demuestre que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ y $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dé un ejemplo tal que $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Ejercicio 6.5. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Demuestre que $\overline{X} = X \cup X'$. Concluya que X es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Ejercicio 6.6. Demuestre que si $X \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces X posee un elemento mínimo y máximo.

Ejercicio 6.7. Pruebe que

(a) si $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ son compactos, entonces $K_1 \cup K_2$ es compacto.

(b) si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de compactos, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ es compacto.

CAPÍTULO 7

LÍMITE DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

7.1 Límites finitos

Definición 7.1. Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X'$ (punto de acumulación). Decimos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando x tiende a a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se denota $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, o también $f(x) \to L$ cuando $x \to a$.

Observación. En la definición se considera $x \neq a$, por lo que es importante que $a \in X'$. Sin embargo, es irrelevante si $a \in X$, es decir, la existencia del límite es independiente si $f(a)$ está definido o no.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, pero $f(0) = 0$.

Ejemplo: Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x}{x}$.

Entonces, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$, pero $g(0)$ no está definida $(0 \notin \operatorname{dom}(g))$.

Observación. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe, significa que

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in X, 0 < |x_\delta - a| < \delta \wedge |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon.$$

7.1.1 Propiedades de límites

Se pueden probar propiedades similares a las de límite de sucesiones.

Teorema 7.1. *Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X'$ tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Entonces, f es acotada en una vecindad de a, o equivalentemente,*

$$\exists c > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| \leq c.$$

Demostración. Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, tenemos que

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < 1.$$

Como

$$|f(x) - L| < 1 \iff L - 1 < f(x) < L + 1,$$

basta tomar $c = \max\{|L - 1|, |L + 1|\}$. □

Teorema 7.2 (Teorema del Sandwich)**.** *Sean* $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ *y* $a \in X'$ *con* $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$*. Si* $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in X \setminus \{a\}$*, entonces* $\lim_{x\to a} h(x) = L$*.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. De la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L$, tenemos:

- $\exists \delta_1 > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$. (En particular, $L - \varepsilon < f(x)$).
- $\exists \delta_2 > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta_2 \implies |g(x) - L| < \varepsilon$. (En particular, $g(x) < L + \varepsilon$).

Si definimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, obtenemos para cualquier $x \in X$ tal que $0 < |x-a| < \delta$:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

es decir, $|h(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \cap X$. □

Teorema 7.3. *Sean* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *y* $a \in X'$ *con* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*. Si* $L < M$*, entonces:*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < g(x).$$

Demostración. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{M-L}{2}$ en la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$:

- $\exists \delta_1 > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta_1 \implies f(x) < L + \varepsilon = \dfrac{M+L}{2}$.
- $\exists \delta_2 > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta_2 \implies g(x) > M - \varepsilon = \dfrac{M+L}{2}$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces,

$$\forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta, f(x) < \frac{M+L}{2} < g(x).$$

□

Corolario 7.4. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) < M$ *(resp.* $\lim_{x\to a} f(x) > M$*), entonces:*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < M \ \ (\textit{resp. } f(x) > M).$$

Demostración. Basta tomar $g \equiv M$ (función constante igual a M) en el Teorema 7.3. □

Corolario 7.5. *Sean* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*. Entonces:*

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in X \setminus \{a\} \implies L \leq M.$$

Demostración. Por contradicción, si $L > M$, el Teorema 7.3 dice que

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > g(x),$$

lo que contradice la hipótesis. □

Observación. En el Corolario 7.5, la desigualdad estricta $f(x) < g(x)$, $\forall x \in X \setminus \{a\}$, no implica que $L < M$. En efecto, basta considerar las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -|x|$ y $g(x) = |x|$, las cuales cumplen que

$$f(x) < g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

pero $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

7.1.2 Límite de funciones y sucesiones

Caracterización de límite mediante sucesiones:

Teorema 7.6. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X'$. Entonces:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \Big(\forall (x_n) \subset X \setminus \{a\}, x_n \to a \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L\Big).$$

Demostración. Sea $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ tal que $a = \lim x_n$ y mostremos que $\lim f(x_n) = L$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, tenemos que

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ahora, como $a = \lim x_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $|x_n - a| < \delta$. Además, $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\forall n > n_0, |f(x_n) - L| < \varepsilon,$$

lo que es la definición de $\lim f(x_n) = L$.

Recíprocamente, si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ no es cierto, entonces

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in X, 0 < |x_\delta - a| < \delta \wedge |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ en la expresión anterior. Así, construimos una sucesión (x_n) de elementos de X tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - L| \geq \varepsilon.$$

En particular, al tomar $n \to +\infty$, obtenemos que $\lim x_n = a$, pero $(f(x_n))$ no converge a L, lo que es la negación de la propiedad de la derecha de la equivalencia. □

Corolario 7.7 (Unicidad del límite)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X'$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} f(x) = M$, entonces $L = M$.*

Demostración. Sea $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$ (notemos que tal sucesión existe, pues a es punto de acumulación de X). Por el Teorema 7.6, se tiene que $\lim f(x_n) = L$ y $\lim f(x_n) = M$. Por la unicidad de límite de sucesiones: $L = M$. □

Corolario 7.8 (Álgebra de límites)**.** *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X'$ con $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Entonces,*

1. $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$.
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L \cdot M$.
3. *Si* $M \neq 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Además, si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g es acotada en una vecindad de a, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Demostración. Basta combinar el Teorema 7.6 con las propiedades de álgebra de límite de sucesiones. Queda propuesto como ejercicio hacer todos los detalles. □

Observación. El Teorema 7.6 es especialmente útil para demostrar la no convergencia de límite de funciones.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(1/x)$. Mostremos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Para esto, basta tomar la sucesión siguiente:

$$x_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}.$$

Se tiene que $x_n \to 0$, pero la sucesión $(f(x_n))$ es divergente, pues

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}.$$

Por otro lado, para $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x\sin(1/x)$, tenemos $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, por el Corolario 7.8, pues $\sin(1/x)$ es acotada en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Ejemplo: Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostremos que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ no existe.

Como $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ e $\mathbb{I}' = \mathbb{R}$, dado cualquier $a \in \mathbb{R}$:

- $\exists (x_n) \subset \mathbb{Q} \setminus \{a\}, x_n \to a.$
- $\exists (y_n) \subset \mathbb{I} \setminus \{a\}, y_n \to a.$

Por la definición de h, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $h(x_n) = 1$ y $h(y_n) = 0$, por lo tanto:

$$\lim h(x_n) = 1 \quad \text{y} \quad \lim h(y_n) = 0.$$

7.2 Límites en el infinito e infinitos

Definición 7.2 (Límites en el infinito)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$ no acotado superiormente y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in X, x > A \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente se define $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ (ejercicio).

Las propiedades probadas para límites cuando $x \to a$ se extienden para límites en el infinito haciendo los ajustes pertinentes. Se deja como ejercicio enunciarlos y probarlos.

Otro tipo de límite de funciones muy común es el siguiente:

Definición 7.3 (Límites infinitos)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ y $a \in X'$. Se dice $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > A.$$

Analogamente se define $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ (ejercicio).

Algunas propiedades para límites infinitos se presentan a continuación.

Proposición 7.9. *Sean $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ y $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y g es acotada inferiormente en una vecindad de a, entonces $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y existe $c > 0$ tal que $g(x) > c$ en una vecindad de a, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = +\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y existe $c > 0$ tal que $f(x) > c$ y $g(x) > 0$ en una vecindad de a, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.*
4. *Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ y f es acotada en una vecindad de a, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Demostración. Ejercicio. □

7.3 Continuidad de una función y propiedades

Definición 7.4 (Continuidad)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$. Se dice que f es *continua en* a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dado $A \subset X$, se dice que f es *continua en* A si es continua en todo $a \in A$, y se dice que f es *continua* si es continua en todo punto de su dominio.

Se dice que f es *discontinua en* a si no es continua en a, es decir,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in X, |x_\delta - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

La expresión anterior representa un "salto" de la función en $x = a$, el punto de discontinuidad.

Observación. Notemos que en la definición anterior, a diferencia con la definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $a \in X$ ($f(a)$ debe estar definida), pero no es necesario que a sea un punto de acumulación. Además, considera el caso $x = a$, el cual satisface trivialmente la condición.

Veamos algunos casos especiales con respecto a la continuidad:

- Si a es un punto aislado de X, entonces toda $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en a.

  En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Si a es un punto aislado de X, entonces existe $\delta > 0$ tal que
  $$(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\},$$
  y la condición $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ se satisface trivialmente para todo $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$.

  Ejemplo: Toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es continua, pues $\mathbb{N}' = \emptyset$ (todos los elementos de $\mathbb{N}$ son puntos aislados). En general, si X es un conjunto sin puntos de acumulación, toda función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua.

- Si a es un punto de acumulación, es decir, $a \in X \cap X'$, entonces
  $$f : X \to \mathbb{R} \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
  En efecto, de la definición de límite de función tenemos que
  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \iff \Big(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon\Big).$$
  Basta notar que se puede incorporar trivialmente el caso $x = a$.

El siguiente resultado nos entrega una caracterización de continuidad mediante sucesiones, la cual es muy útil para deducir propiedades y verificar la continuidad de funciones.

Teorema 7.10. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$. Entonces:*

$$f \text{ es continua en } a \iff \Big(\forall (x_n) \subset X, x_n \to a \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)\Big).$$

Demostración. La demostración es idéntica a la del Teorema 7.6 (caracterización de límite de funciones mediante sucesiones). Se deja de ejercicio adaptar esta demostración a este caso. □

Corolario 7.11 (Álgebra de funciones continuas)**.** *Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in X$. Entonces,*

1. *$f \pm g : X \to \mathbb{R}$ es continua en a, donde $(f \pm g)(x) := f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.*
2. *$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ es continua en a, donde $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in X$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, $f/g : X \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{R}$ es continua en a, donde $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$, $\forall x \in X \setminus \{g = 0\}$, donde hemos usado la notación $\{g = 0\} := \{x \in X \ / \ g(x) = 0\}$.*

Demostración. Usaremos la caracterización de continuidad por sucesiones. Tomemos una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$. Como f y g con continuas en a, tenemos que $f(x_n) \to f(a)$ y $g(x_n) \to g(a)$. Entonces, usando las propiedades de álgebra de límite de sucesiones:

1. $\lim(f \pm g)(x_n) = \lim \big(f(x_n) + g(x_n)\big) = f(a) + g(a) = (f \pm g)(a)$.
2. $\lim(f \cdot g)(x_n) = \lim \big(f(x_n) \cdot g(x_n)\big) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$.
3. Como $g(a) \neq 0$ y $g(x_n) \to g(a)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(x_n) \neq 0$, $\forall n > n_0$ (ver Teorema 4.6). Así, tiene sentido el siguiente cálculo:

$$\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a).$$

□

Observación. En general, si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in X$ y $f(a) \neq 0$, entonces

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (a - \delta, a + \delta), f(x) \neq 0.$$

En efecto, supongamos (sin pérdida de generalidad) que $f(a) > 0$. Tomando $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ en la definición de continuidad de f en a, tenemos que

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}.$$

En particular, $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$, $\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$.

Más aún, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas en $a \in X$ y $f(a) < g(a)$ (resp. $f(a) > g(a)$), entonces

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (a - \delta, a + \delta), f(x) < g(x) \text{ (resp. } f(a) > g(a)).$$

Teorema 7.12 (Composición de funciones continuas)**.** *Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : Y \to \mathbb{R}$ tales que $f(X) \subset Y$, de modo que la composición $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ está bien definida. Si f es continua en $a \in X$ y g es continua en $b = f(a) \in Y$, entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Demostración. Sea $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$ y probemos que $g(f(x_n)) \to g(f(a))$.

Por la continuidad de f en a, se tiene que $f(x_n) \to f(a)$. Como $(f(x_n)) \subset Y$, por la continuidad de g en $f(a)$, se tiene que $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. □

Observación. ¿Es cierta la contrarrecíproca? Es decir: ¿$g \circ f$ continua $\implies$ f y g continuas?

En general, la respuesta es no. Consideremos las funciones

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 0$$

y

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Notemos que g es continua en $\mathbb{R}$, pero f es discontinua en $x = 0$.

Además, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo que $g \circ f$ es continua en $\mathbb{R}$.

7.3.1 Teorema de los Valores Intermedios

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de los Valores Intermedios, que dice que una función continua toma todos los valores entre dos imágenes distintas. Como paso previo, veremos un caso particular conocido como el Teorema de Bolzano.

Lema 7.13 (Teorema de Bolzano)**.** *Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. La idea de la demostración es constriur inductivamente una sucesión de intervalos encajonados $I_n = [a_n, b_n]$ tales que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$, donde $f(c) = 0$.

Sea $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Como $f(a)f(b) < 0$, se tiene que $f(a)f(c_1) \leq 0$ o $f(c_1)f(b) \leq 0$. Entonces, podemos definir el intervalo

$$I_1 = \begin{cases} [a, c_1], & \text{si } f(a)f(c_1) \leq 0, \\ [c_1, b], & \text{si } f(c_1)f(b) \leq 0. \end{cases}$$

Denotemos $I_1 = [a_1, b_1]$ y notemos que:

- $I_1 \subset [a, b]$.
- $f(a_1)f(b_1) \leq 0$.
- $a_1 \geq a$ y $b_1 \leq b$.
- $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$.

Supongamos que hemos definido una familia de intervalos $\{I_i\}_{i=1}^n$ tales que

- $I_i = [a_i, b_i]$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $[a, b] \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $f(a_i, b_i) \leq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $a_i \leq a_{i+1}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
- $b_i \geq b_{i+1}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
- $b_i - a_i = \dfrac{b-a}{2^i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Definimos

$$I_{n+1} = \begin{cases} [a_n, c_{n+1}], & \text{si } f(a_n)f(c_{n+1}) \leq 0, \\ [c_{n+1}, b_n], & \text{si } f(b_n)f(c_1) \leq 0. \end{cases}$$

Notemos que I_{n+1} está bien definido, pues como $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, entonces $f(a_n)f(c_{n+1}) \leq 0$ o $f(c_{n+1})f(b) \leq 0$ es cierta. Denotamos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ y observemos que:

- $I_{n+1} \subset I_n$.
- $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$.
- $a_{n+1} \geq a_n$ y $b_{n+1} \leq b_n$.
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Así, construimos una sucesión $(a_n) \subset [a, b]$ creciente y acotada, por lo tanto es convergente. Llamemos $c = \lim a_n \in [a, b]$ (de hecho: $c = \sup a_n$).

Notemos que la sucesión (b_n) es decreciente y acotada, por lo que también es convergente. Como

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $\lim b_n = c$.

Finalmente, como f es continua en $[a, b]$, en particular lo es en c. Entonces, podemos pasar al límite en la expresión

$$f(a_n)f(b_n) \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y obtenemos $f(c)^2 \leq 0$, lo que implica que $f(c) = 0$. $\square$

Teorema 7.14 (Teorema de los Valores Intermedios (TVI))**.** *Sean $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, y asumamos que $f(a) < f(b)$. Si $f(a) < d < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demostración. Sea $d \in (f(a), f(b))$ y definamos $h(x) = f(x) - d$. Verifiquemos que h satisface las hipótesis del Teorema de Bolzano. Como f es continua en $[a, b]$, entonces también lo es h (suma de funciones continuas en $[a, b]$).

- $h(a) = f(a) - d < 0$.
- $h(b) = f(b) - d > 0$.

En consecuencia, tenemos que $h(a)h(b) < 0$. Por el Teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = d$. □

Observación. La hipótesis de continuidad en todo el intervalo cerrado es clave en el TVI (y en el Teorema de Bolzano). Consideremos la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

la cual no es continua en $x = 1$. Vemos claramente que $f(0) < \frac{1}{2} < f(1)$, pero $f(x) \neq \frac{1}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$.

7.3.2 Continuidad en compactos

En esta sección probaremos que toda función continua en un conjunto compacto, alcanza sus valores máximo y mínimo. Comencemos con un resultado previo.

Lema 7.15. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es acotada:*

$$\exists C > 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq C.$$

Demostración. Por contradicción, supongamos que f no es acotada. Entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, |f(x_n)| > n.$$

Como X es compacto, la sucesión (x_n) posee una subsucesión (x_{n_k}) convergente a un $a \in X$ (ver Teorema 6.10), es decir, $x_{n_k} \to a$ cuando $k \to +\infty$. Además, por la definición de (x_n), tenemos

$$|f(x_{n_k})| > n_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo que implica que la subsucesión $(f(x_{n_k}))$ no es acotada, pues $n_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$.

De la continuidad de f en X, deducimos que f es continua en a y en consecuencia, por el Teorema 7.10, obtenemos

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(a).$$

En particular, esto dice que $(f(x_{n_k}))$ es acotada, lo que es una contradicción. □

Teorema 7.16 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Notemos que por el Lema 7.15, como f es continua en el compacto X, f es acotada y, por lo tanto, su imagen

$$f(X) = \{f(x) \;/\; x \in X\} \subset \mathbb{R}$$

es un conjunto acotado. Como $f(X) \neq \emptyset$, por el axioma del supremo, existen

$$s = \inf f(X) \quad \text{y} \quad S = \sup f(X),$$

y se tiene que

$$s \leq f(x) \leq S, \quad \forall x \in X.$$

Por contradicción, supongamos que $f(x) < S$, $\forall x \in X$. En este caso, queda bien definida la función $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)}.$$

De la continuidad de f en X, deducimos que g también es continua en X. Como además X es compacto, por el Lema 7.15, g es acotada. En particular:

$$\exists R > 0, \forall x \in X, \frac{1}{S - f(x)} \leq R,$$

es decir,

$$\exists R > 0, \forall x \in X, f(x) \leq S - \frac{1}{R}.$$

Deducimos que $S - \frac{1}{R}$ es cota superior de $f(X)$. Como $S = \sup f(X)$, obtenemos

$$S \leq S - \frac{1}{R} < S,$$

lo que es claramente una contradicción. De esta manera, podemos asegurar que

$$\exists x_1 \in X, f(x_1) = S.$$

Queda como ejercicio adaptar el argumento anterior para probar que

$$\exists x_0 \in X, f(x_0) = s.$$

□

Observación. Las hipótesis de continuidad de f y compacidad de X son todas necesarias para asegurar el resultado del Teorema de Weierstrass.

Ejemplo: (Falta de continuidad) Sea $X = [-1, 1]$, el cual es compacto. Consideremos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

Notemos que f no es continua en $x = 0$ y, como $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, es no acotada.

Ejemplo: (Falta de compacidad 1) Sea $X = [0, 1)$, el cual es acotado, pero no cerrado. Por lo tanto, no es compacto.

Consideremos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, la cual es continua en X. Además, como $0 \leq f(x) < 1$, para todo $x \in X$, f es acotada. De hecho, $\sup_{x \in X} f(x) = 1$, pero este valor no es alcanzado por un elemento de X.

Ejemplo: (Falta de compacidad 2) Sea $X = [0, +\infty)$, el cual es cerrado, pero no acotado. Por lo tanto, no es compacto.

Consideremos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, la cual es continua en X, pero no es acotada.

7.4 Continuidad uniforme

Recordemos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice *continua* si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La continuidad tiene un carácter **local**, en el sentido de que la vecindad depende del punto donde se analiza la continuidad (δ depende de x). La continuidad uniforme entrega una noción **global** de continuidad, donde δ es independiente de x.

Definición 7.5 (Continuidad uniforme)**.** Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice *uniformemente continua* en X si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ejemplo: Sean $a, b \in \mathbb{R}$. La función $f(x) = ax + b$ es uniformemente continua. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Si $a = 0$, el resultado es trivial, pues $f(x) - f(y) = 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
Si $a \neq 0$, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, pues para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| < \delta$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| = |a||x - y| < |a|\delta = |a|\frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

Observación. Toda función uniformemente continua es continua. Sin embargo, la recíproca no es cierta, esto es, existen funciones continuas que no son uniformemente continuas.

Ejemplo: La función $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$ es continua, pero no es uniformemente continua.

Notemos primero que, en general, una función $f : X \to \mathbb{R}$ no es uniformemente continua si:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in X, |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Ahora, sea $\delta > 0$ y tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{\delta}$. Sean $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{2n}$. Para este par de puntos, tenemos que

$$|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

pero

$$|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n.$$

Basta tomar cualquier $\varepsilon \in (0, 1)$ para tener

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| \geq \varepsilon.$$

Teorema 7.17. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es uniformemente continua.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que f es continua, pero no uniformemente continua. Esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $\delta = \frac{1}{n}$, entonces

$$\exists x_n, y_n \in X, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Definimos así dos sucesiones de elementos de X, (x_n) e (y_n), con la propiedad anterior. Como X es compacto, por el Teorema 6.10, ambas sucesiones poseen subsucesiones convergentes a un punto de X. Siendo precisos:

$$\exists (x_{n_k}), x_{n_k} \to c_1, \text{ con } c_1 \in X$$

y

$$\exists (y_{n_k}), y_{n_k} \to c_2, \text{ con } c_2 \in X.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |c_1 - c_2| &\leq |c_1 - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| + |y_{n_k} - c_2| \\ &\leq |c_1 - x_{n_k}| + \frac{1}{n} + |y_{n_k} - c_2|, \end{aligned}$$

lo que junto con $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = c_1$ y $\lim\limits_{k \to +\infty} y_{n_k} = c_2$, implica que $c_1 = c_2$. Llamemos $c := c_1 = c_2$.

Ahora, como f es continua en $c \in X$ (pues f es continua en X), entonces

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \quad \text{y} \quad \lim_{k \to +\infty} f(y_{n_k}) = f(c).$$

En consecuencia, $\lim\limits_{k \to +\infty} \big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big) = 0$, lo que contradice el hecho de que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

□

Como consecuencia inmediata del Teorema anterior, tenemos:

Corolario 7.18. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función con X compacto. Entonces:*

$$f \text{ es uniformemente continua} \iff f \text{ es continua (en todo } a \in X).$$

7.5 Ejercicios

Ejercicio 7.1. Sea $X, Y \subset \mathbb{R}$ y $f : X \to Y$ una función. Demuestre que

$$f \text{ es continua } \iff \forall y \in Y, \forall \varepsilon > 0, f^{-1}\big((y-\varepsilon, y+\varepsilon)\big) \text{ es abierto.}$$

Nota: $f^{-1}\big((y-\varepsilon, y+\varepsilon)\big)$ es la preimagen del intervalo $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ por f, es decir,

$$f^{-1}\big((y-\varepsilon, y+\varepsilon)\big) = \{x \in X / f(x) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)\}.$$

Ejercicio 7.2. Pruebe que todo polinomio a coeficientes reales de grado $n \in \mathbb{N}$ impar tiene al menos una raíz real.

Hint: Use el TVI.

Ejercicio 7.3. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función tal que $\forall \varepsilon > 0$, existe una función continua $f_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in X, |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

Pruebe que f es continua.

Hint: Para $x, a \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, note que $f(x)-f(a) = f(x)-f_\varepsilon(x)+f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(a)+f_\varepsilon(a)-f(a)$.

Ejercicio 7.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Pruebe que f posee mínimo, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7.5. *Teorema del punto fijo.*

(a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que si $f(a) \leq a$ y $f(b) \geq b$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

(b) Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Hint: Defina $h(x) = f(x) - x$ y aplique el TVI.

Ejercicio 7.6. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1)$. Demuestre que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. Pruebe lo mismo usando $1/3$ en lugar de $1/2$. Generalice para $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7.7. Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que $f(X)$ (conjunto imagen de X por f) es un conjunto compacto.

Hint: Utilice la caracterización de conjunto cerrado mediante sucesiones vista en clases.

Ejercicio 7.8. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo **no** compacto. Muestre que

(a) existe $f : I \to \mathbb{R}$ continua tal que no es acotada.

(b) existe $f : I \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que no alcanza su máximo (o mínimo).

Ejercicio 7.9. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice **lipschitziana** si existe $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in X.$$

Nota: La constante K es llamada constante de Lipschitz de f.

(a) Pruebe que toda función lipschitziana es uniformemente continua.

(b) Sea $a > 0$. Pruebe que $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.

Ejercicio 7.10. Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que f es uniformemente continua si y solo si para todo par de sucesiones $(x_n), (y_n) \subset X$ tales que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f(x_n) - f(y_n)\big) = 0$.

Use este resultado para probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, no es uniformemente continua.

CAPÍTULO 8

FUNCIONES DERIVABLES

8.1 Definición y ejemplos

Definición 8.1 (Derivabilidad)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X \cap X'$. Se dice que f es *derivable* (o *diferenciable*) en el punto a si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{8.1}$$

llamado *derivada de f en a* y denotado por $f'(a)$.

Dado $A \subset X$, se dice que f *es derivable en A* si es derivable en todo $a \in A$, y se dice que f es *derivable* si es derivable en todo punto de su dominio.

Si el límite (8.1) no existe, decimos que f es *no derivable* (o *no diferenciable*) en a.

Observación. La derivabilidad, al igual que la continuidad, es un concepto local. Si f es derivable en todo punto $x \in X \cap X'$, entonces queda bien definida la función derivada de f como

$$\begin{array}{rcl} f' : X \cap X' & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

Si f' es continua, se dice que f es de clase C^1.

Interpretación de la derivada. Para fijar ideas, sea f una función continua en $\mathbb{R}$, y tomemos $a, x \in \mathbb{R}$. Entonces, el cuociente

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

es la variación promedio de f en el intervalo (a, x). Tomando límite cuando $x \to a$, el límite (en caso de existir)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se interpreta como la variación o cambio "instantáneo" de f (con respecto a x, la variable independiente) en el punto a.

La primera propiedad que posee una función derivable es que también es continua.

Teorema 8.1. *Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in X \cap X'$. Entonces, f en continua en a.*

Demostración. Notemos que para todo $x \in X \setminus \{a\}$ tenemos que

$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a). \tag{8.2}$$

Como f es derivable en a, existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

y por lo tanto, por el álgebra de límite de funciones,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \lim_{x \to a}(x - a) = 0.$$

Entonces, podemos tomar límite en (8.2) de donde obtenemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

es decir, f es continua en a. □

Observación. La recíproca no es cierta en general. En efecto, sea $f(x) = |x|$, la cual es continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, f no es derivable en $x = 0$. Veamos que el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe. Lo haremos con la caracterización de límite de funciones mediante sucesiones (Teorema 7.6):

- Sea $x_n = \frac{1}{n}$, entonces
$$\lim \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = \lim \frac{1/n}{1/n} = 1.$$
- Sea $y_n = -\frac{1}{n}$, entonces
$$\lim \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n} = \lim \frac{1/n}{-1/n} = -1.$$

Ejemplo: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Notemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Entonces, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. Para estudiar la derivabilidad para $x \neq 0$, será útil conocer algunas reglas de cálculo de derivadas.

8.2 Reglas de cálculo de derivadas

Teorema 8.2 (Álgebra de funciones derivables)**.** *Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in X \cap X'$. Entonces, también son derivables en a las funciones $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (si $g(a) \neq 0$), y se tiene:*

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

Demostración. Comencemos observando que los límites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \tag{8.3}$$

existen.

1. Denotemos $h(x) = (f+g)(x)$, para todo $x \in X$. Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Tenemos
$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$
Entonces, por (8.3),
$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a),$$
es decir, $h'(a) = f'(a)+g'(a)$.

2. Sea ahora $h(x) = (f\cdot g)(x)$, para todo $x \in X$. Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Tenemos
$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a).\end{aligned}$$
Como f es derivable en a, en particular es continua en a. Entonces, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Junto a (8.3) obtenemos
$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = f(a)g'(a)+f'(a)g(a),$$
es decir, $h'(a) = f(a)g'(a)+f'(a)g(a)$.

3. Finalmente, sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para todo $x \in X \setminus g^{-1}(\{0\})$. Como g es continua en a y $g(a) \neq 0$, entonces:
$$\exists \delta > 0, \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X, g(x) \neq 0.$$
Por lo tanto, h está bien definida en el conjunto $(a-\delta, a+\delta)\cap X$. Para $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X \setminus \{a\})$, se tiene
$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} &= \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right)\frac{1}{x-a}\\ &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}\\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right),\end{aligned}$$
Para pasar al límite cuando $x \to a$, basta tomar en cuenta (8.3) y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, pues g es continua en a (pues g derivable en a). Entonces,
$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$
es decir, $h'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

$\square$

Teorema 8.3 (Regla de la cadena)**.** *Sean $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$ tales que $f(X) \subset Y$ y $f(a) = b$. Si f es derivable en a y g es derivable en b, entonces $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es derivable en a, y se tiene*
$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demostración. Usaremos la caracterización por sucesiones para mostrar que el límite
$$\lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$
existe y es igual a $g'(f(a))\,f'(a)$.

Sea $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ tal que $x_n \to a$ y mostremos que

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a))\, f'(a). \tag{8.4}$$

Distinguiremos dos casos: $f'(a) \neq 0$ y $f'(a) = 0$.

• Supongamos que $f'(a) \neq 0$. Como

$$f'(a) = \lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \neq 0.$$

En consecuencia, $f(x_n) \neq f(a)$, $\forall n > n_0$ y tiene sentido la identidad

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)}\, \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}, \quad \forall n > n_0. \tag{8.5}$$

De la continuidad de f en a, tenemos que $f(x_n) \to f(a)$. Entonces, como g es derivable en $f(a)$, tenemos

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} = g'(f(a)).$$

Con esto, podemos pasar al límite en (8.5) y obtener (8.4).

• Supongamos ahora que $f'(a) = 0$. Primero, observemos que basta mostrar que

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0$$

para probar que (8.4) es verdadera.

Como $f'(a) = 0$, no podemos asegurar que $f(x_n) \neq f(a)$, $\forall n > n_0$, algún $n_0 \in \mathbb{N}$, por lo que no podemos pasar directamente al límite en (8.5) (de hecho, la identidad puede no tener sentido).

Sean

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ f(x_n) = f(a)\} \quad \text{y} \quad \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ f(x_n) \neq f(a)\}.$$

Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, entonces $\mathbb{N}_1$ o $\mathbb{N}_2$ es infinito. Veamos los casos posibles.

Si $\mathbb{N}_1$ es finito, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \neq f(a)$, $\forall n > n_0$. Así, en este caso tiene sentido la identidad (8.5) y se puede pasar al límite obteniendo (8.4) de forma análoga.

Si $\mathbb{N}_1$ es infinito, debemos (nuevamente) distinguir dos casos: $\mathbb{N}_2$ finito y $\mathbb{N}_2$ infinito.

El primer caso significa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) = f(a)$, $\forall n > n_0$. En particular,

$$g(f(x_n)) = g(f(a)), \quad \forall n > n_0,$$

y por lo tanto

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0.$$

Finalmente, si $\mathbb{N}_1$ y $\mathbb{N}_2$ son infinitos, tiene sentido el límite

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0,$$

y (8.5) es válida para $n \in \mathbb{N}_2$ y tenemos

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a))\, f'(a) = 0.$$

Considerando que $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, estas últimas dos igualdades implican

$$\lim \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0.$$

□

Ejemplo: Revisitemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del ejemplo anterior:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ya vimos que f es derivable en $x = 0$ con $f'(0) = 0$. Los resultados anteriores nos aseguran que f es derivable en todo $x \neq 0$ con

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \neq 0.$$

Así, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queda definida como

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ahora, como el límite

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

no existe, f' no es continua en $x = 0$ (pero sí lo es en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). En particular, f no es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

Ejercicio: Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y considere la función $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_m(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestre que:

1. f_0 no es continua en $x = 0$.
2. f_1 es continua, pero no derivable en $x = 0$.
3. f_2 es derivable (y, por ende, continua) en $x = 0$, pero f_2' no es continua en $x = 0$.
4. f_3' es continua en $x = 0$.

¿Puede generalizar para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{R}$?

8.3 Derivadas y valores extremos

Definición 8.2 (Máximo y mínimo local)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$. Se dice que a es un

1. *máximo local* de f si
$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \implies f(x) \leq f(a).$$
2. *mínimo local* de f si
$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \implies f(x) \geq f(a).$$

Definición 8.3 (Máximo y mínimo global)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$. Se dice que a es un

1. *máximo global o absoluto* de f si
$$\forall x \in X, f(x) \leq f(a).$$
2. *mínimo global o absoluto* de f si
$$\forall x \in X, f(x) \geq f(a).$$

Teorema 8.4 (Regla de Fermat)**.** *Dado $X \subset \mathbb{R}$, denotemos:*

$$X_a^+ := X \cap (a, +\infty) \quad y \quad X_a^- := X \cap (-\infty, a).$$

Sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X \cap (X_a^+)' \cap (X_a^-)'$, tales que a es un máximo o mínimo local (o global) de f. Si f es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración. Supongamos que $a \in X \cap (X_a^+)' \cap (X_a^-)'$ es un mínimo local de f, es decir,

$$\exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \delta \implies f(x) \geq f(a).$$

Por un lado,

$$\forall x \in X, a < x < a + \delta, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

entonces:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Por otro lado,

$$\forall x \in X, a - \delta < x < a, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0,$$

luego

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Concluimos que $f'(a) = 0$.

Para el caso $a \in X \cap (X_a^+)' \cap (X_a^-)'$ máximo local, basta considerar la función $g(x) = -f(x)$ y notar que a es un mínimo local de g. Luego, por lo anterior tenemos que $g'(a) = 0$ y, como $g'(a) = -f'(a)$, se tiene que $f'(a) = 0$. □

Observación.

- La recíproca no es cierta en general. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es derivable tal que $f'(0) = 0$, pero $x = 0$ no es un mínimo.
- Dado $X \subset \mathbb{R}$, $a \in (X_a^+)' \cap (X_a^-)'$ se dice *punto de acumulación bilateral.*

  Ejemplo: Si $X = [0, 1) \cup (1, 2)$, entonces 1 es punto de acumulación bilateral, pero 0 y 2 no lo son.
- Del Teorema anterior podemos deducir:

  a es máximo o mínimo local $\implies$ $f'(a) = 0 \vee$ ($f'(a)$ no existe) $\vee$ (a no es punto de acumulación bilateral).

8.4 Teoremas de valor medio

Teorema 8.5 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces,*

$$\exists c \in (a, b), \quad f'(c) = 0.$$

Demostración. Como f es continua en el compacto $[a, b]$, por el Teorema de Weierstrass (Teorema 7.16), existen $x_m, x_M \in [a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in [a, b].$$

Supongamos que al menos uno entre x_m y x_M es un punto interior, es decir, $x_m \in (a, b)$ o $x_M \in (a, b)$. Entonces, como f es derivable en x_m y x_M, por el Teorema de Fermat tenemos que

$$f'(x_m) = 0 \quad \vee \quad f'(x_M) = 0.$$

En caso contrario, se tiene que $x_m, x_M \in \{a, b\}$, esto es, el mínimo y el máximo de f se alcanza en los bordes del intervalo. Además, como $f(a) = f(b)$, tenemos que $f(x_m) = f(x_M)$. Así, f es constante. En efecto, para todo $x \in [a, b]$:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(x_m).$$

Luego, $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. □

Teorema 8.6 (Teorema del Valor Medio (TVM) de Lagrange)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b). Entonces,*

$$\exists c \in (a, b), \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Consideremos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

Notemos que la conclusión viene del Teorema de Rolle: si existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$, entonces

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Basta, entonces, verificar que g satisface las hipótesis del Teorema de Rolle:

- Como la función identidad y f (por hipótesis) son continuas en $[a,b]$, entonces g también es continua en $[a,b]$, por álgebra de funciones continuas.
- Como la función identidad y f (por hipótesis) son derivables en (a,b), entonces g también es derivable en (a,b), por álgebra de funciones derivables.
- Finalmente, notemos que por la definición de g:

  $$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0,$$

  es decir, $g(a) = g(b)$.

$\square$

Observación. Las conclusiones de estos resultados puede fallar si f no es continua en (el cerrado) $[a,b]$ o no es derivable en (a,b).

Ejemplo: Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1), \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Observemos que $f'(c) = 0$, $\forall c \in (0,1)$, pero

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

En este caso, el TVM no aplica, pues f no es continua en el intevalo cerrado $[0,1]$ (no es continua en $x = 1$).

Ejemplo: Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = |x|$, la cual no es derivable en el intervalo abierto $(-1,1)$, pues no es derivable en $x = 0$.

Se tiene que

$$\frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)} = 0,$$

pero $g'(c) \neq 0$, $\forall c \in (-1,1) \setminus \{0\}$.

8.5 Derivadas y monotonía

Corolario 8.7. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces f es decreciente.*
2. *Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces f es constante.*
3. *Si $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$, entonces f es creciente.*

Demostración. Sean $x, y \in (a, b)$ tales que $x < y$. Aplicaremos el TVM a la restricción de f en el intervalo $[x, y]$, es decir, $f : [x, y] \to \mathbb{R}$.

Como f es derivable en (a, b), entonces es continua en (a, b). En particular, como $[x, y] \subset (a, b)$, f es continua en ek intervalo cerrado $[x, y]$. De igual manera, f es derivable en el intervalo abierto (x, y). Por el TVM,

$$\exists c \in (x, y), \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Como $y - x > 0$, el signo de $f(y) - f(x)$ es el mismo que el signo de $f'(c)$, lo que permite deducir las propiedades del Corolario. □

Observación. Por la definición de la derivada, las recíprocas son ciertas, es decir, si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces:

1. f es decreciente $\iff$ $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$.
2. f es constante $\iff$ $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.
3. f es creciente $\iff$ $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Corolario 8.8. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente.*
2. *Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente.*

Observación. La recíproca en este caso no es cierta. En efecto, la función $f(x) = x^3$ es tal que $f'(0) = 0$, pero es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$.

8.6 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Sean $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in X$. Además, suponga que f y h son derivables en $a \in X \cap X'$ con $f(a) = h(a)$ y $f'(a) = h'(a)$. Demuestre que g es derivable en a y que $g'(a) = f'(a)$.

Ejercicio 8.2. Sea I in intervalo, $a \in I$ un punto interior y $f : I \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Demuestre que si f es derivable en a, entonces existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$$

y su valor es $f'(a)$.

(b) Muestre mediante un ejemplo que la existencia del límite anterior no implica necesariamente que la f sea derivable en a.

Ejercicio 8.3. *Teorema del Valor Medio Generalizado.*
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y derivables en (a, b). Demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Hint: Aplique el TVM a una función auxiliar adecuada.

Ejercicio 8.4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que f es constante.

Ejercicio 8.5. Sea f una función derivable para todo $x > 0$ tal que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Sea $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Pruebe que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Ejercicio 8.6. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = 0$, derivable en $(0, +\infty)$ con f' monótona creciente. Se define

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x > 0.$$

Pruebe que g es monótona creciente.

Hint: Le puede ser útil mostrar primero que: $\forall x > 0$, $\exists c \in (0, x)$, $g(x) = f'(c)$.

Ejercicio 8.7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(a) < f'(b)$. Demuestre que si $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda$.

Hint: Justifique la existencia de puntos mínimos de la función $g(x) = f(x) - \lambda x$ en el intervalo (a, b).

Nota: Un resultado análogo se obtiene si $f'(a) > f'(b)$.